

Contributions aux méthodes numériques en électromagnétisme

Stephanie Lohrengel

Soutenance en vue de l'obtention de
l'Habilitation à Diriger des Recherches

17 juin 2014

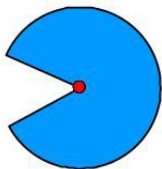
Thèmes de recherche

- **Singularités d'origine géométrique du champ é.m.**
 - Singularités dans des matériaux composites
 - Singularités au voisinage de fissures
- **Méth. num. dans des géométries avec singularités**
 - EF de Lagrange, Galerkin discontinu, XFEM, ...
- ***Schémas centrés pour les éq. de Maxwell stationnaires***
 - Schémas volumes finis
(avec M. Remaki, équipe CAIMAN, INRIA Sophia-Antipolis)
 - Méthode de Galerkin discontinue
(avec S. Piperno et al., équipe CAIMAN, INRIA Sophia-Antipolis)
- **Problèmes inverses en électromagnétisme**
 - Identification de fissures
 - Contrôlabilité frontière
 - Reconstruction de petits défauts

Singularités



entaille en U



entaille en V
(singularité)

Ouverture facile

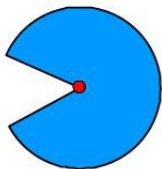


Une entaille en V est plus **dangereuse** qu'une entaille en U !

Singularités



entaille en U



entaille en V
(singularité)

Ouverture facile

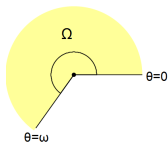


Une entaille en V est plus **dangereuse** qu'une entaille en U !

Dans la famille des singularités ...

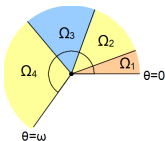
Singularités du Laplacien : $S(r, \theta) = r^\lambda \varphi(\theta)$ t.q. $\Delta S = 0$

- ① Matériau homogène avec "coin rentrant" ($\pi < \omega \leq 2\pi$) :



$$\left| \begin{array}{l} \varphi'' + \lambda^2 \varphi = 0 \text{ ds. } (0, \omega) \\ + \text{C.L.} \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_{\min} = \frac{\pi}{\omega} < 1 \\ \varphi(\theta) = \sin\left(\frac{\pi}{\omega}\theta\right) \end{array}$$

- ② Matériau composite ($\varepsilon = \varepsilon_j$) :



$$\left| \begin{array}{l} (\varepsilon \varphi')' + \lambda^2 \varepsilon \varphi = 0 \text{ ds. } (0, \omega) \\ + \text{C.L.} \end{array} \right.$$

Singularités Maxwell : $E \approx \nabla S$

Modèles et équations

Les équations de Maxwell

$$\partial_t \mathcal{D} - \operatorname{rot} \mathcal{H} = -\mathcal{J}$$

$$\partial_t \mathcal{B} + \operatorname{rot} \mathcal{E} = 0$$

$$\operatorname{div} \mathcal{D} = \rho$$

$$\operatorname{div} \mathcal{B} = 0$$

lois de constitution :

$$\mathcal{D} = \varepsilon \mathcal{E}$$

$$\mathcal{B} = \mu \mathcal{H}$$

$$\mathcal{J} = \sigma \mathcal{E} + \mathcal{J}_s$$

... en champ électrique

$$\varepsilon \partial_t^2 \mathcal{E} + \operatorname{rot} \mu^{-1} \operatorname{rot} \mathcal{E} = -\partial_t \mathcal{J}$$

... harmoniques en temps : $e^{i\omega t}$

$$\operatorname{rot} \mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \omega^2 \varepsilon \mathbf{E} = -i\omega \mathbf{J}$$

Courants de Foucault : $\varepsilon\omega \ll \sigma$

$$\operatorname{rot} \mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{E} + i\omega\sigma \mathbf{E} = -i\omega \mathbf{J}_s$$

\mathcal{E}, \mathcal{D} : champ/induction électrique, \mathcal{H}, \mathcal{B} : champ/induction magn.

\mathcal{J} : densité de courant, ρ : densité de charges

ε, μ, σ : paramètres électromagnétiques, $\omega > 0$: pulsation

Plan de l'exposé

- 1 Méthodes numériques en présence de singularités
 - Matériaux composites
 - Fissures (XFEM)
- 2 Résolution de quelques problèmes inverses
 - Identification de fissures par algo. génétique
 - Reconstruction de petits défauts
- 3 Perspectives

Le problème dans un matériau composite ($\sigma = 0$)

Les équations de Maxwell harmoniques en temps

$$\begin{cases} \operatorname{rot}(\mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{E}) - \omega^2 \varepsilon \mathbf{E} = -i\omega \mathbf{J}_s & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{J}_s = 0 \text{ dans } \Omega \Rightarrow \operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{E}) = 0 \text{ dans } \Omega$$

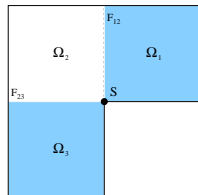
Données

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon_j > 0, \mu(\mathbf{x}) = \mu_j > 0 \text{ sur } \Omega_j$$

$$\mathbf{J}_s \in L^2(\Omega) \text{ (terme de source)}$$

Conditions de transmission

$$[\mathbf{E} \times \mathbf{n}]_{|F_{ij}} = 0, [\varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}]_{|F_{ij}} = 0$$



$$\bar{\Omega} = \bigcup_{j=1}^J \bar{\Omega}_j, \quad \mathcal{S} = \underbrace{\mathcal{S}_{\text{ext}} \cup \mathcal{S}_{\text{int}}}_{\text{sommets des } \Omega_j}$$

Le problème dans un matériau composite ($\sigma = 0$)

Les équations de Maxwell harmoniques en temps

$$\begin{cases} \operatorname{rot}(\mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{E}) - \omega^2 \varepsilon \mathbf{E} = -i\omega \mathbf{J}_s & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{J}_s = 0 \text{ dans } \Omega \Rightarrow \operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{E}) = 0 \text{ dans } \Omega$$

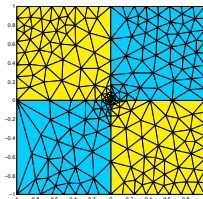
Données

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon_j > 0, \mu(\mathbf{x}) = \mu_j > 0 \text{ sur } \Omega_j$$

$$\mathbf{J}_s \in L^2(\Omega) \text{ (terme de source)}$$

Conditions de transmission

$$[\mathbf{E} \times \mathbf{n}]|_{F_{ij}} = 0, [\varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}]|_{F_{ij}} = 0$$



$$\bar{\Omega} = \bigcup_{j=1}^J \bar{\Omega}_j, \quad \mathcal{S} = \underbrace{\mathcal{S}_{ext} \cup \mathcal{S}_{int}}_{\text{sommets des } \Omega_j}$$

Formulation variationnelle régularisée

Espace d'énergie finie

$$\mathcal{H}_0(\text{rot}; \Omega) = \{ \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \mid \text{rot } \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega), (\mathbf{u} \times \mathbf{n})|_{\partial\Omega} = 0 \}$$

Problème régularisé

$$\mathcal{H}_0(\text{rot}, \text{div}\varepsilon; \Omega) = \{ \mathbf{u} \in \mathcal{H}_0(\text{rot}; \Omega) \mid \text{div}(\varepsilon \mathbf{u}) \in \mathbf{L}^2(\Omega) \}$$

$$\text{Trouver } \mathbf{u} \in \mathcal{H}_0(\text{rot}, \text{div}\varepsilon; \Omega) \text{ tel que} \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \omega^2(\varepsilon \mathbf{u}, \mathbf{v}) = -i\omega(\mathbf{J}_s, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{H}_0(\text{rot}, \text{div}\varepsilon; \Omega) \quad (2)$$

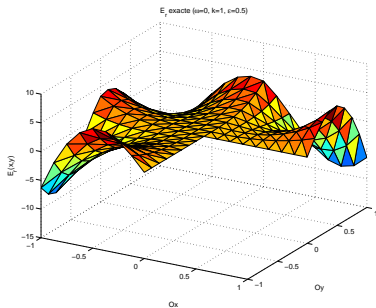
$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mu^{-1} \text{rot } \mathbf{u} \cdot \overline{\text{rot } \mathbf{v}} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \text{div } \varepsilon \mathbf{u} \overline{\text{div } \varepsilon \mathbf{v}} \, d\mathbf{x}$$

$\varepsilon = 1, \mu = 1 \rightsquigarrow$ opérateur $\text{rot rot} - \nabla \text{div} = -\Delta$

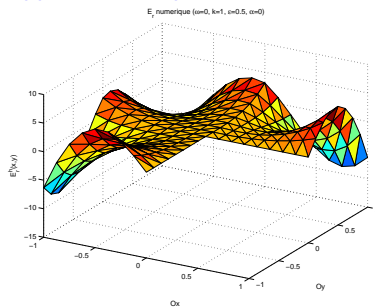
\rightsquigarrow discrétisation par EF de Lagrange

Discrétisation par éléments finis nodaux

Solution exacte régulière

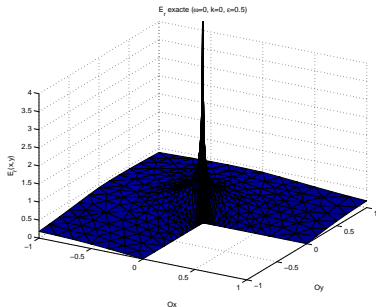


Approximation par éléments finis P1

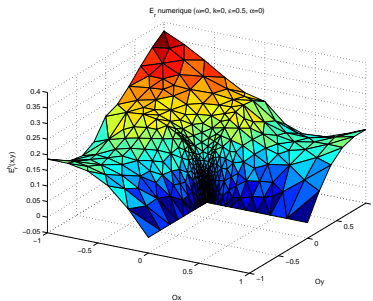


Discrétisation par éléments finis nodaux

Solution exacte singulière



Approximation par éléments finis P1



Discrétisation par éléments finis nodaux ?

Problème discret $\Rightarrow \mathbf{V}_h^{\text{Lagrange}} \subset \underbrace{\mathcal{H}_0(\text{rot}, \text{div}\varepsilon; \Omega) \cap PH^1((\Omega_j)_j)}_{\text{sous-espace des champs réguliers}}$

où $PH^s((\Omega_j)_j) = \left\{ \varphi \in L^2(\Omega) \mid \varphi|_{\Omega_j} \in H^s(\Omega_j), j = 1, \dots, J \right\}$

Résultat de non-densité (cf. [Costabel-Dauge-Nicaise '99])

$\mathcal{H}_0(\text{rot}, \text{div}\varepsilon; \Omega) \cap PH^1((\Omega_j)_j)$ est **fermé** dans $\mathcal{H}_0(\text{rot}, \text{div}\varepsilon; \Omega)$

\Rightarrow Si le champ électrique \mathbf{E} n'appartient pas à $PH^1((\Omega_j)_j)$, la solution discrète \mathbf{E}^h calculée par EF de type Pk/Qk ne converge pas vers \mathbf{E} , mais vers une solution **non-physique**.

Discrétisation par éléments finis nodaux ?

Problème discret $\Rightarrow \mathbf{V}_h^{\text{Lagrange}} \subset \underbrace{\mathcal{H}_0(\text{rot}, \text{div}\varepsilon; \Omega) \cap \mathcal{PH}^1((\Omega_j)_j)}_{\text{sous-espace des champs réguliers}}$

où $\mathcal{PH}^s((\Omega_j)_j) = \left\{ \varphi \in L^2(\Omega) \mid \varphi|_{\Omega_j} \in H^s(\Omega_j), j = 1, \dots, J \right\}$

Résultat de non-densité (cf. [Costabel-Dauge-Nicaise '99])

$\mathcal{H}_0(\text{rot}, \text{div}\varepsilon; \Omega) \cap \mathcal{PH}^1((\Omega_j)_j)$ est **fermé** dans $\mathcal{H}_0(\text{rot}, \text{div}\varepsilon; \Omega)$

\Rightarrow Si le champ électrique \mathbf{E} n'appartient pas à $\mathcal{PH}^1((\Omega_j)_j)$, la solution discrète \mathbf{E}^h calculée par EF de type Pk/Qk ne converge pas vers \mathbf{E} , mais vers une solution **non-physique**.

Que faire ?

ajouter explicitement la (ou les) singularité(s) à l'espace V_h^{Lagrange}

- **Méthode du complément singulier** (matériau homogène)
(cf. [Assous/Ciarlet Jr. et al., 1998, 2000])
- **Méthode du champ singulier** (matériau homogène)



Bonnet BenDhia/Hazard/L. 1999, Hazard/L. 2002

Problème : Implémentation en 3D

Abandonner les éléments finis nodaux ?

- utiliser les **éléments finis d'arête** [Nédélec, 1980]
⇒ ok avec raffinement du maillage (cf. [Nicaise, 2001])
- utiliser une **méthode de Galerkin discontinue**
⇒ ok avec raffinement du maillage



L./Nicaise, 2007

Que faire pour utiliser des éléments finis nodaux ?

Condition d'impédance

pénaliser la condition au bord $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0$ par une condition d'impédance
 $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \lambda \operatorname{rot} \mathbf{E} \times \mathbf{n}$

- **Matériau homogène** : densité de l'espace des champs réguliers dans l'espace de la formulation variationnelle (cf. [Ciarlet Jr./L./Nicaise '98], [Costabel/Dauge '98])
- **Matériau composite** : résultat de densité **uniquement sous des conditions contraignantes sur les ε_j**



L./Nicaise, 2002

Régularisation à poids

Idée

prendre un espace variationnel plus grand (**espace à poids**)

(cf. [Costabel/Dauge '02] pour un milieu homogène)

$$\mathbf{W}_\alpha = \{ \mathbf{u} \in \mathcal{H}_0(\text{rot}; \Omega) \mid \text{div}(\varepsilon \mathbf{u}) \in L_\alpha^2(\Omega) \}$$

où
$$L_\alpha^2(\Omega) = \{ \varphi \in \mathcal{D}'(\Omega) \mid w^\alpha \varphi \in L^2(\Omega) \}$$

avec $w(\mathbf{x}) \simeq \text{dist}(\mathbf{x}, \mathcal{S}_0 \cup \mathcal{E}_0)$, $\mathcal{S}_0 \cup \mathcal{E}_0 = \{\text{sommets/arêtes "à sing." des } \Omega_j\}$

Trouver $\mathbf{u} \in \mathbf{W}_\alpha$ tel que

$$a_w(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \omega^2(\varepsilon \mathbf{u}, \mathbf{v}) = -i\omega(\mathbf{J}_s, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}_\alpha \quad (3)$$

$$a_w(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Omega \mu^{-1} \text{rot } \mathbf{u} \cdot \overline{\text{rot } \mathbf{v}} \, d\mathbf{x} + \int_\Omega w^{2\alpha} \text{div } \varepsilon \mathbf{u} \overline{\text{div } \varepsilon \mathbf{v}} \, d\mathbf{x}$$

Régularisation à poids

Résultat de densité

Pour tout $\alpha \in [0, 1[$ **suffisamment grand**, $\mathbf{W}_{\alpha,R} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{W}_{\alpha} \cap PH^1((\Omega_j)_j)$ est dense dans \mathbf{W}_{α} .



Ciarlet Jr./Lefèvre/L./Nicaise, 2010

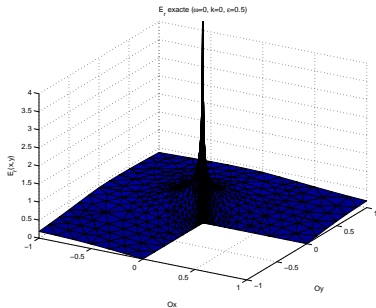
une borne inf. pour α peut être calculée **explicitement** ou approx.

Idée de la preuve :

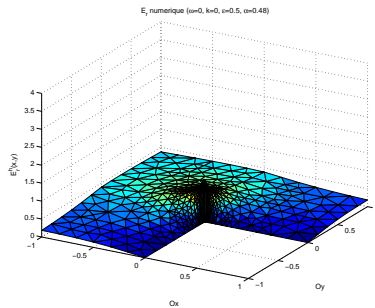
- identifier l'espace des potentiels scalaires H_{α} et des potentiels scalaires réguliers $H_{\alpha,R} = H_{\alpha} \cap PH^2((\Omega_j)_j)$ t.q. $\nabla H_{\alpha} \subset \mathbf{W}_{\alpha}$,
 - montrer que $\mathbf{W}_{\alpha,R}$ est dense dans \mathbf{W}_{α} **ssi** $H_{\alpha,R}$ est dense dans H_{α} ,
 - étude des singularités (duales) de l'opérateur $-\text{div } \varepsilon \nabla \cdot$,
- \Rightarrow l'orthogonal de $\overline{H_{\alpha,R}}$ dans H_{α} est $\{0\}$

Approximation d'une solution singulière

résultat de densité \rightsquigarrow discrétisation par EF de Lagrange



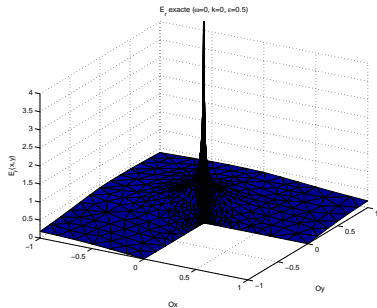
Solution exacte singulière



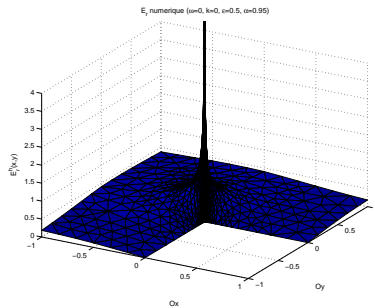
Approximation par EF P1 ($\alpha = 0.48$)

Approximation d'une solution singulière

résultat de densité \rightsquigarrow discrétisation par EF de Lagrange

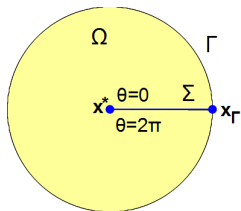


Solution exacte singulière



Approximation par EF P2 ($\alpha = 0.95$)

Géométrie avec fissure débouchante



Domaine sans fissure : $Q \subset \mathbb{R}^2$

Fissure droite

$$\Sigma = \{s\mathbf{x}^* + (1-s)\mathbf{x}_\Gamma \mid s \in [0, 1]\}$$

Domaine avec fissure : $\Omega = Q \setminus \Sigma$

... on peut adapter les méthodes précédentes au cas d'une fissure :

- méthode du champ singulier
- méthode de régularisation à poids

mais ...

Motivation : contrôle non destructif (CND)

↪ **identification** de fissures (problème inverse !)

Problème direct : Pour une **fissure donnée** Σ , déterminer la **quantité mesurable** par la **simulation** du champ électromagnétique dans le domaine fissuré.

↪ nécessite une méth. num. qui tient compte de la **singularité** au fond de fissure

Problème inverse : A partir de **mesures données**, trouver la **fissure** à l'origine de ces mesures par la **minimisation d'une fonction coût** $\mathcal{C}(\Sigma)$.

Coût des calculs

1 évaluation de $\mathcal{C}(\Sigma)$ = 1 simulation

⇒ Coût prohibitif si **maillage conforme à la géométrie** !

Motivation : contrôle non destructif (CND)

↪ **identification** de fissures (problème inverse !)

Problème direct : Pour une **fissure donnée** Σ , déterminer la **quantité mesurable** par la **simulation** du champ électromagnétique dans le domaine fissuré.

↪ nécessite une méth. num. qui tient compte de la **singularité** au fond de fissure

Problème inverse : A partir de **mesures données**, trouver la **fissure** à l'origine de ces mesures par la **minimisation d'une fonction coût** $\mathcal{C}(\Sigma)$.

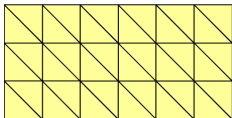
Coût des calculs

1 évaluation de $\mathcal{C}(\Sigma)$ = 1 simulation

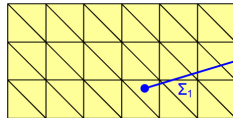
⇒ Coût prohibitif si **maillage conforme à la géométrie** !

XFEM-arêtes

Eléments finis étendus (XFEM) \rightsquigarrow basés sur un maillage **unique** du **domaine sans fissure** !



maillage de Q



même maillage pour $\Omega = Q \setminus \Sigma$

Principe

prise en compte de la **discontinuité** et de la **singularité** des champs dans l'espace de discrétisation

\Rightarrow **enrichissement** de l'espace de discrétisation classique en utilisant une connaissance *a priori* de la solution

Origines de la méthode en mécanique ("XFEM-nœuds") :

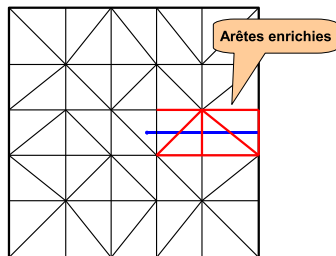
\Rightarrow suivre la propagation d'une fissure **sans remailler le domaine**

(cf. [Moës, Dolbow, Belytschko, 1999])

XFEM-arêtes

Une arête $e \in \mathcal{E}$ est enrichie si le support de \mathbf{w}_e est découpé par la fissure.

⇒ ensemble \mathcal{E}_H des arêtes enrichies



Espace des éléments finis étendus

$$\underbrace{\mathbf{X}_h^{\text{EF}}}_{\text{EF d'arêtes}} \oplus \underbrace{\text{Vect}(H\mathbf{w}_e \mid e \in \mathcal{E}_H)}_{\text{discontinuité}} \oplus \underbrace{\text{Vect}(\nabla(\eta S))}_{\text{singularité}} \subset \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega)$$

$$H(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{n}_\Sigma > 0 \\ -1 & \text{si } (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{n}_\Sigma < 0 \end{cases}$$

$$S(r, \theta) = \sqrt{r} \sin(\theta/2)$$

$\eta = \eta(r)$: fct. de troncature

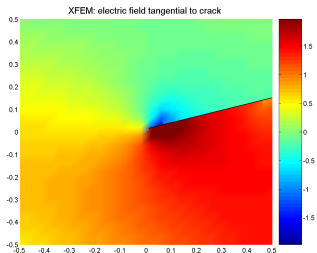
XFEM-arêtes

Estimations d'erreur (matériau homogène)

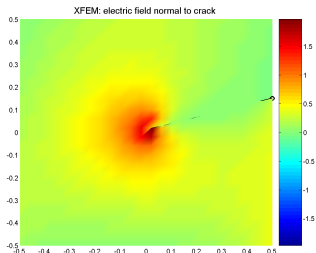
erreur de discrétisation en $\mathcal{O}(h^{1/2-\delta})$



Lefèvre/L./Nicaise, 2011



composante du champ électrique
tangentielle à la fissure



composante du champ électrique
normale à la fissure

Application : modèle des courants de Foucault

Configuration 2D

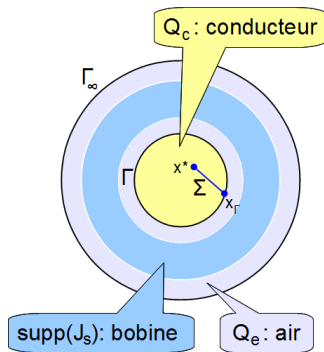
$$Q = Q_c \cup Q_e \subset \mathbb{R}^2, \Gamma = \partial Q_c$$

$$\Omega = Q \setminus \Sigma$$

Fond de fissure $x^* \in Q_c$

Fissure débouchante $\Rightarrow x_\Gamma \in \Gamma$

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_c > 0 & \text{dans } Q_c \\ 0 & \text{dans } Q_e \end{cases}$$



Modèle

$$\text{rot } \mu^{-1} \text{rot } \mathbf{E} - \omega \underbrace{(\varepsilon\omega)}_{\ll \sigma} - i\sigma \mathbf{E} = -i\omega \mathbf{J}_s$$

Comportement du champ \mathbf{E}

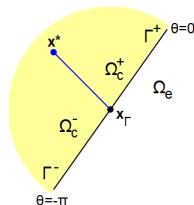
les lignes de courant contournent la fissure $\rightsquigarrow \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_\Sigma = 0$ sur $\Sigma \cup \Gamma$

- **Discontinuité** de $\mathbf{E} \times \mathbf{n}$ à travers Σ
- **Singularité** en \mathbf{x}^* : $\mathbf{E} \approx \nabla S$ avec $S(r, \theta) = \sqrt{r} \sin(\theta/2)$
- Comportement en \mathbf{x}_Γ ?

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{E}|_{\Omega_c^\pm} \text{ régulier } (\Omega_c^\pm \text{ convexe !}) \\ \mathbf{E}|_{\Omega_e} \approx \nabla S_\Gamma \text{ avec } S_\Gamma(r_\Gamma, \theta_\Gamma) = \theta_\Gamma/\pi \end{array} \right.$$

\rightsquigarrow "saut" du potentiel, $\mathbf{E}|_{\Omega_e} \notin L^2(\Omega_e)$!

\rightsquigarrow **nouveau** cadre fonctionnel avec $\mathbf{E}|_{\Omega_e}$
 dans un espace à poids



 L./Nicaise, 2014

Comportement du champ E

les lignes de courant contournent la fissure $\rightsquigarrow \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_\Sigma = 0$ sur $\Sigma \cup \Gamma$

- **Discontinuité** de $\mathbf{E} \times \mathbf{n}$ à travers Σ
- **Singularité** en \mathbf{x}^* : $\mathbf{E} \approx \nabla S$ avec $S(r, \theta) = \sqrt{r} \sin(\theta/2)$
- Comportement en \mathbf{x}_Γ ?

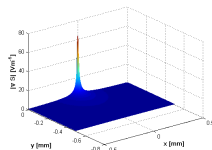
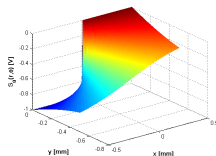
$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{E}|_{\Omega_e^\pm} \text{ régulier } (\Omega_c^\pm \text{ convexe!}) \\ \mathbf{E}|_{\Omega_e} \approx \nabla S_\Gamma \text{ avec } S_\Gamma(r_\Gamma, \theta_\Gamma) = \theta_\Gamma / \pi \end{array} \right.$$

\rightsquigarrow "saut" du potentiel, $\mathbf{E}|_{\Omega_e} \notin L^2(\Omega_e)$!

\rightsquigarrow **nouveau** cadre fonctionnel avec $\mathbf{E}|_{\Omega_e}$
 dans un espace à poids



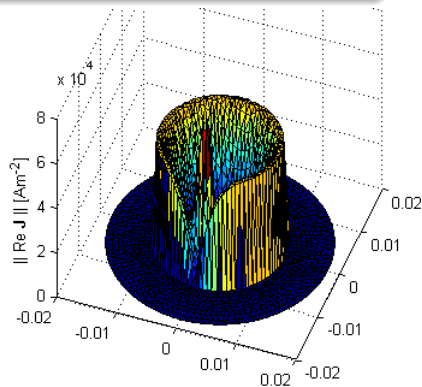
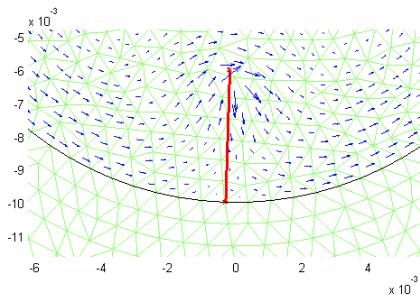
L./Nicaise, 2014



Résultats numériques (XFEM)

Formulation $\mathbf{A} - \psi$ en potentiels combinés

$$\mathbf{J}_{\text{Foucault}} = \sigma \mathbf{E} = -i\omega\sigma (\mathbf{A} + \nabla\psi)$$



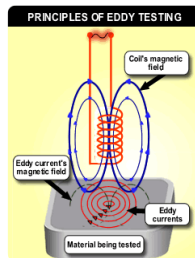
Densité de courant $\text{Re}(\mathbf{J})$

Amplitude $\|\text{Re}(\mathbf{J})\|$

Problème inverse : identification de fissures

Les courants de Foucault sont déviés par la fissure.

- ⇒ Variation d'impédance de la bobine.
- ⇒ Détection d'une évtl. fissure.

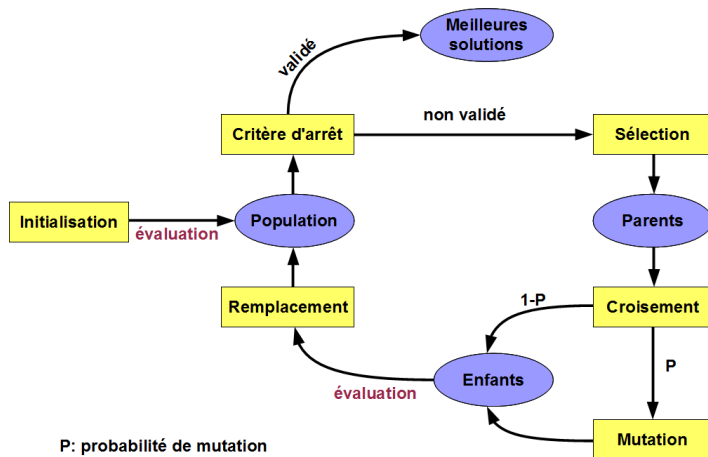


Impédance

$$Z_{\Sigma} \simeq \underbrace{\int_{\Omega_c} \sigma |\mathbf{E}|^2 dx}_{\text{résistance}} + i\omega \underbrace{\int_{\Omega} \mu^{-1} |\text{rot } \mathbf{E}|^2 dx}_{\text{inductance}} \in \mathbb{C}$$

Fonction coût : $\mathcal{C}(\Sigma) = \frac{|Z_{\Sigma} - Z^*|}{|Z^*|} \rightarrow \min$, Z^* : impédance mesurée

Optimisation par algorithme génétique (AG)

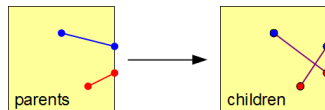


Configuration du AG

Individu : Fissure représentée par $N = 2$ points de Q


Population : 100 individus

Croisement : One-point crossover



Mutation : Petit déplacement d'un point choisi au hasard pour $P = 1\%$ de la population

Critères d'arrêt : au plus 50 générations ou 15 générations sans augmentation de la fonction score

Plateforme : ParadisEO (INRIA) 
(cf. [Cahon, Melab, Talbi, 2004])

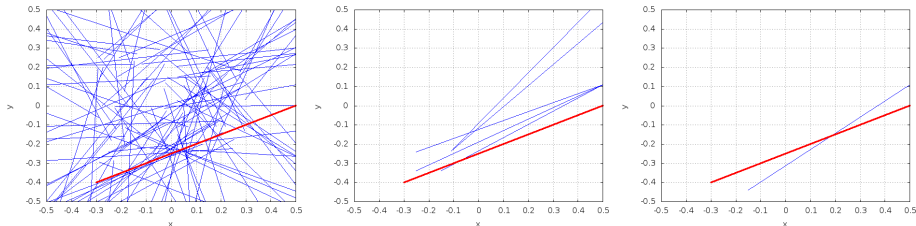
Centre de Calcul de
Champagne-Ardenne ROMEO



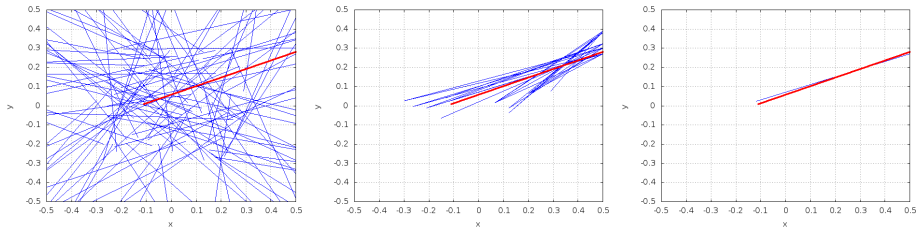
Boisson/Lefèvre/L., 2012

Résultats numériques (modèle conducteur seulement)

Evolution de l'AG : pop. initiale, intermédiaire et finale (mesures d'impédance Z^* pour une fréquence fixée).

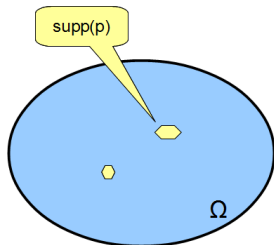


Evolution de l'AG (mesures dynamiques $Z^*(t)$) :



Un autre problème inverse : reconstruction de petits défauts

défaut = perturbation d'un fond régulier



Fond (pièce de référence) : $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$

Perméabilité magn. (pièce à contrôler) :

$$\mu_\alpha(\mathbf{x}) = 1 + \alpha p(\mathbf{x})$$

- $\alpha > 0 \rightsquigarrow$ ordre de grandeur connu
- $\text{supp}(p) \rightsquigarrow$ localisation des défauts

Problème inverse

Reconstruire la **perturbation** $p(\mathbf{x})$ à partir de **mesures dynamiques** sur toute ou une partie du bord de la pièce à contrôler.

Formule asymptotique

- Mesures dynamiques sur pièce de référence saine ($\alpha = 0$)
 $\rightsquigarrow \text{rot } \mathbf{E}(\cdot, t)$ sur $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$, $t \in (0, T)$
- Mesures dynamiques sur pièce à contrôler ($\alpha \neq 0$)
 $\rightsquigarrow \text{rot } \mathbf{E}_\alpha(\cdot, t)$ sur Γ_0 , $t \in (0, T)$

Solution de référence (en absence de défauts) : **onde plane** de vecteur d'onde $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^2$ (choix particulier des sources)

Formule d'Ammari (cf. [Ammari, 2003])

$$\iint_{\Gamma_0 \times (0, T)} e^{i|\boldsymbol{\eta}|t} \partial_t (e^{-i|\boldsymbol{\eta}|t} G_\eta) \underbrace{(\text{rot } \mathbf{E}_\alpha - \text{rot } \mathbf{E})}_{\text{mesures}} d\sigma dt$$

$$= -\alpha |\boldsymbol{\eta}|^2 \underbrace{\int_{\Omega} p(\mathbf{x}) e^{2i\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{x}} dx}_{=\pi^2 \mathcal{F}(p(-\boldsymbol{\pi} \cdot))} + \mathcal{O}(\alpha^2)$$

G_η : terme de **contrôle frontière** indépendant des défauts

Procédure de reconstruction


$$M_\alpha(\boldsymbol{\eta}) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{\alpha|\boldsymbol{\eta}|^2} \iint_{\Gamma_0 \times (0, T)} e^{i|\boldsymbol{\eta}|t} \partial_t (e^{-i|\boldsymbol{\eta}|t} G_\boldsymbol{\eta}) (\text{rot } \mathbf{E}_\alpha - \text{rot } \mathbf{E}) d\sigma dt$$

Pour un ensemble (discret) de vecteurs $\boldsymbol{\eta}$ échantillonnés,

- prendre des mesures dynamiques $\text{rot } \mathbf{E}$ sur la pièce de référence (sources dépendantes de $\boldsymbol{\eta}$),
- prendre des mesures dynamiques $\text{rot } \mathbf{E}_\alpha$ sur la pièce à contrôler (mêmes sources),
- **calculer le contrôle frontière $G_\boldsymbol{\eta}$ par la méthode d'unicité de Hilbert (HUM)**,
- calculer $M_\alpha(\boldsymbol{\eta})$ par intégration numérique,

Trouver p par transformation de Fourier inverse de $(M_\alpha(\boldsymbol{\eta}))_\boldsymbol{\eta}$.

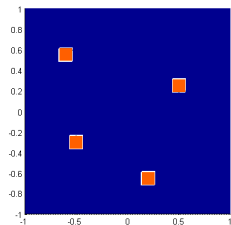
Résultats

- **Existence et calcul effectif du contrôle frontière** pour les équations de Maxwell instationnaires du second ordre
 - **Discrétisation de l'opérateur HUM**
↪ Solveur Maxwell instationnaire
 - **Inversion de l'opérateur HUM**
↪ méthode itérative de type gradient conjugué
 - **Stabilisation par méthode bi-grille**
-  Darbas/Goubet/L., 2012
à partir de résultats d'observabilité du système du 1^{er} ordre (cf. [Phung, 2000])
- **Mise en place de la procédure de reconstruction**
 - échantillonnage
 - calcul des termes de contrôle frontière
 - IFFT

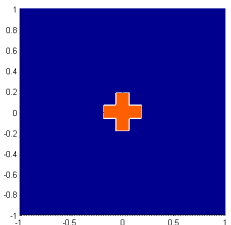


Darbas/L., 2014

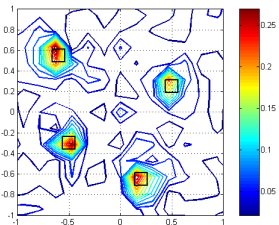
Exemples de reconstruction



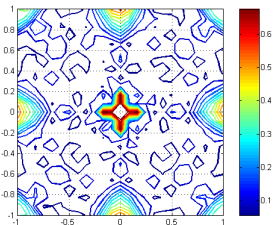
forme exacte



forme exacte



reconstruction avec 256 pts.



reconstruction avec 1024 pts.

Conclusion et perspectives

Contribution

- à l'étude du champ é.m. en présence de singularités,
- au développement de méth. num. dans des géométries avec singularités,
- à la résolution de quelques problèmes inverses en électromagnétisme.

Perspectives

- **Identification de fissures planes** \rightsquigarrow **config. 3D**
 - étude du champ é.m. au voisinage de l'embouchure de la fissure (avec S. Nicaise),
 - XFEM 3D (avec F. Lefèvre, Y. Le Bihan (LGEP))
- **Localisation de sources en EEG chez le nouveau-né**
 - Thèse de M. Diallo (avec M. Darbas, A. El Badia)