

# Contributions aux méthodes numériques en électromagnétisme

---

Stephanie Lohrengel

## Mémoire

préparé au Laboratoire de Mathématiques de Reims, EA 4535

présenté en vue de l'obtention de

## **l'Habilitation à Diriger des Recherches**

Soutenue le 17 juin 2014 devant le jury composé de

Martin Costabel	(IRMAR, Univ. Rennes 1, <b>rapporteur</b> )
Michel Salaün	(ISAE, Toulouse, <b>rapporteur</b> )
Grégory Vial	(Ecole Centrale Lyon, <b>rapporteur</b> )
Laurent Di Menza	(LMR, Univ. Reims, <b>examineur</b> )
Olivier Goubet	(LAMFA, Univ. Picardie, <b>examineur</b> )
Christophe Hazard	(POEMS, ENSTA ParisTech, Palaiseau, <b>examineur</b> )
Serge Nicaise	(LAMAV, Univ. Valenciennes, <b>examineur</b> )
Stéphanie Salmon	(LMR, Univ. Reims, <b>examineur</b> )

**Ecole Doctorale Sciences, Technologies, Santé  
Université de Reims Champagne-Ardenne**





## Remerciements

Je tiens avant tout à remercier Martin Costabel, Michel Salaün et Grégory Vial d'avoir accepté de rapporter sur ce mémoire. Je leur exprime toute ma gratitude pour le temps qu'ils m'ont consacré et l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail.

Je remercie Olivier Goubet, directeur de la Fédération de recherche ARC Mathématiques, d'avoir accepté de faire partie du jury. Il a initié en 2009 les échanges amiéno-reimois qui furent à l'origine de mes collaborations avec le LAMFA.

Avec un clin d'œil vers le passé, j'exprime ma reconnaissance à Christophe Hazard. Co-directeur de ma thèse, il a su guider mes premiers pas dans la recherche avec beaucoup de disponibilité et de bienveillance. Sa présence dans le jury aujourd'hui me touche particulièrement.

Un merci très chaleureux à Serge Nicaise qui a également accepté de faire partie du jury. Son énergie et son enthousiasme m'ont encouragée depuis le temps de ma thèse à poursuivre mes recherches dans le domaine des singularités. Chaque collaboration avec lui a été pour moi une nouvelle occasion d'échanges enrichissants. Je lui exprime ici toute mon amitié.

Je remercie Laurent Di Menza et Stéphanie Salmon de représenter l'Université de Reims dans ce jury. Laurent a su, avec beaucoup d'humour, me convaincre qu'il était temps de me mettre à la rédaction de mon HDR. Il n'a jamais hésité à intervenir quand la procédure administrative semblait au point mort. Merci à tous les deux de faire vivre notre équipe!

J'ai une pensée amicale pour Marion Darbas avec qui j'ai découvert quelques problèmes inverses. C'est avec plaisir que je pense à toutes nos discussions, scientifiques ou non, à Amiens ou à Reims, à Paris ou par mail. Notre collaboration m'est très précieuse!

Je tiens à remercier tous ceux et celles avec qui j'ai eu l'occasion de travailler, et en particulier mes co-auteurs sans qui ce mémoire n'existerait pas : Marion Darbas et Olivier Goubet avec qui j'ai travaillé sur les problèmes de contrôlabilité, Patrick Ciarlet et Serge Nicaise pour nos travaux sur les singularités, Jean-Charles Boisson et François Lefèvre pour XFEM et les algorithmes génétiques, enfin, Serge Piperno, Loula Fézoui, Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia et Christophe Hazard pour des travaux qui remontent à plus longtemps. Je n'oublierai pas l'aide précieuse de Hervé Deleau pour faire tourner mes codes sur le calculateur ROMEO.

J'exprime ma reconnaissance à Jacques Alev pour ses conseils et la confiance qu'il m'a accordée tout au long de la période où il était directeur du LMR. Un grand merci également à Michaël Pevzner qui a pris la suite dans la direction du laboratoire, pour sa disponibilité et ses encouragements. Ce laboratoire ne serait pas ce qu'il est sans la présence et le travail sans relâche de sa secrétaire : merci, Christelle, pour ton aide dans l'organisation des journées scientifiques, pour la gestion des projets et le suivi des ordres de mission, le thé du vendredi et mille autres choses encore. Merci enfin à tous les membres du laboratoire, à Lisette, Alain, Thierry et les autres pour les chocolats, cafés et discussions qui sont les rayons de lumière d'une journée de travail.

Mes remerciements vont également aux membres du Laboratoire J.A. Dieudonné de Nice dont j'ai fait partie de 1999 jusqu'en 2005. J'y ai trouvé une ambiance amicale et chaleureuse. J'ai quitté Nice en 2005 pour retrouver François à Reims. Merci à Jacques Blum pour son soutien dans la réalisation de l'échange de postes qui a permis ce rapprochement. J'ai une pensée particulière pour Frédéric Poupaud qui, dans les derniers mois de sa vie, a encore trouvé des paroles d'encouragement dans les tracas de cet échange.

Je tiens à remercier Estelle Odinot de l'Ecole Doctorale pour son aide précieuse dans le traitement de mon dossier. Je remercie également le personnel du service de reprographie qui a assuré avec soin le tirage de ce mémoire.

Enfin, je n'aurais pas pu mener à bien ce travail sans le soutien de ma famille et particulièrement de François. Mari, co-bureau et co-auteur, il accepte de porter ces casquettes toutes à la fois. Je l'en remercie de tout mon cœur. J'ai une pensée affectueuse pour Thomas et Lisa, nos enfants. Merci pour ce que vous êtes!



*Il y a un temps pour tout,  
un temps pour toute chose sous le ciel.*

*L'Ecclésiaste*



# Introduction

Ce mémoire résume mes travaux de recherche depuis ma thèse dans le domaine de l'électromagnétisme numérique. Dans ce domaine très vaste, je me suis intéressée plus particulièrement à l'analyse et l'élaboration de méthodes basées sur les éléments finis en passant par une étude approfondie du comportement local des champs électrique et magnétique.

Ce document comporte un chapitre introductif suivi de quatre chapitres consacrés aux différents thèmes de recherche, ainsi qu'un chapitre présentant les perspectives et recherches en cours. Des travaux en marge de la thématique de l'électromagnétisme numérique sont présentés succinctement en annexe.

Depuis ma thèse, je m'intéresse aux méthodes numériques dans des géométries présentant des singularités telles que des coins et des arêtes. Dans de tels domaines, l'analyse mathématique même des modèles simples issus des équations de Maxwell réserve parfois des surprises, et des méthodes que l'on pensait maîtriser parfaitement sont mises en échec. Le deuxième chapitre prolonge en ce sens les travaux de ma thèse. Il est consacré à l'étude mathématique et la simulation du champ électromagnétique en présence de matériaux composites. Un matériau composite est obtenu par l'union de différents matériaux homogènes. Si les matériaux occupent des domaines polyédriques, le champ électromagnétique présente des singularités aux sommets et aux interfaces des sous-domaines. Ce comportement singulier doit être pris en compte de façon appropriée par la méthode numérique utilisée. A la base de nos investigations est une formulation 'régularisée' des équations de Maxwell qui ressemble formellement à l'équation de Helmholtz vectorielle. Cette formulation permet une discrétisation par éléments finis de Lagrange dès lors que les champs réguliers sont denses dans l'espace de la formulation variationnelle. Nous clarifions les questions de densité dans le cadre des matériaux composites et différentes conditions aux limites pour la régularisation classique, la régularisation à poids et une méthode de Galerkin discontinue.

Le troisième chapitre résume les résultats issus d'une collaboration avec des membres de l'équipe CAIMAN d'INRIA-Sophia Antipolis pendant que j'étais Maître de Conférences à l'Université de Nice. Ce fut pour moi l'occasion de passer d'une vision 'elliptique' des équations de Maxwell en régime harmonique à une vision 'hyperbolique' des équations dans le domaine spatio-temporel. Les travaux concernent l'étude d'une famille de méthodes de Galerkin discontinues avec flux centré. Le choix d'un flux centré, contrairement aux méthodes de type MUSCL basées sur des flux décentrés, conduit à des schémas non dissipatifs qui conservent une certaine énergie discrète et permettent ainsi des simulations sur des temps longs.

Le chapitre 4 est consacré au développement d'une méthode de type éléments finis étendus (XFEM) pour les équations de Maxwell. Depuis une dizaine d'années, les méthodes XFEM ont suscité un vif intérêt dans la communauté mécanique où elles ont été utilisées initialement pour la simulation de phénomènes de propagation de fissures. Si la géométrie de la fissure change au cours du temps, une méthode d'éléments finis classique nécessite un nouveau maillage à chaque pas de temps. Les méthodes XFEM quant à elles utilisent un seul maillage indépendant de la fissure tandis que la discontinuité du champ de déplacement à travers la fissure est prise en compte dans l'espace de discrétisation ce qui évite la coûteuse étape de remaillage. De par leur champ d'application, les méthodes XFEM ont été développées pour les éléments finis de Lagrange. Nous avons adapté le concept aux éléments finis d'arêtes rendant ainsi possible leur utilisation pour

la simulation du champ électromagnétique en présence de fissures. L'application principale qui a motivé notre travail est l'identification de fissures dans des dispositifs du contrôle non destructif. Nous avons ainsi proposé un algorithme génétique permettant l'identification d'une fissure dans une géométrie 2D simple.

Dans le cadre du projet PINCEL de la région Picardie, je me suis intéressée aux problèmes de reconstruction de petits défauts à partir de mesures dynamiques du champ électrique, en collaboration avec M. Darbas et O. Goubet. Notre objectif était la mise en œuvre d'un algorithme de reconstruction basé sur une formule asymptotique développée par H. Ammari. Cet algorithme repose sur le calcul numérique de termes de contrôle ce qui nous a amenés à étudier et à implémenter la Méthode d'Unicité de Hilbert (HUM) de J.-L. Lions pour les équations de Maxwell instationnaires.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Les équations de Maxwell</b>	<b>1</b>
1.1	Modélisation	1
1.1.1	Equations de Maxwell du second ordre en régime transitoire	2
1.1.2	Equations de Maxwell en régime harmonique	3
1.1.3	Conditions aux limites	3
1.1.4	Remarques sur les équations de Maxwell en dimension 2	4
1.2	Espaces fonctionnels et notations	4
1.3	Formulations variationnelles classiques	6
1.3.1	Formulation variationnelle en régime harmonique	6
1.3.2	Formulation variationnelle en régime transitoire	6
1.4	Potentiels scalaire et vecteur	7
1.5	Discrétisation	8
1.5.1	Eléments finis d'arête	8
1.5.2	Décomposition de Helmholtz discrète	9
<b>2</b>	<b>Méthodes pour matériaux composites</b>	<b>11</b>
2.1	Introduction	11
2.2	Le problème modèle	12
2.2.1	La géométrie des matériaux composites	12
2.2.2	Formulation variationnelle classique	13
2.2.3	Singularités du problème scalaire de transmission	14
2.2.4	Singularités duales	16
2.3	Dans l'esprit de la méthode du champ singulier	17
2.3.1	Le problème régularisé	17
2.3.2	Résultats de densité	18
2.3.3	Conséquences sur le plan numérique et conclusion	21
2.4	La méthode de régularisation à poids	22
2.4.1	Le problème avec régularisation à poids	23
2.4.2	Résultats de densité	23
2.4.3	Discrétisation et résultats numériques	26
2.4.4	Conclusion	27
2.5	Une méthode de Galerkin discontinue	28
2.5.1	Formulation du problème et résultats de régularité	28
2.5.2	Discrétisation par une méthode de Galerkin discontinue	29
2.5.3	Convergence optimale de la méthode	31
2.5.4	Conclusion	34
<b>3</b>	<b>Schémas numériques avec flux centrés</b>	<b>35</b>
3.1	Introduction et position du problème	35
3.2	Etude du schéma de volumes finis	37
3.3	Etude de la méthode de Galerkin discontinue	40

3.4	Conclusion . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Méthode des éléments finis d'arête étendus</b>	<b>45</b>
4.1	Introduction . . . . .	45
4.2	Éléments finis d'arête étendus . . . . .	46
4.2.1	Géométrie du domaine fissuré et résultats de régularité . . . . .	46
4.2.2	Discrétisation par XFEM-arêtes . . . . .	48
4.2.3	Implémentation . . . . .	50
4.2.4	Résultats numériques . . . . .	51
4.2.5	Le cas instationnaire . . . . .	52
4.3	Application à l'identification de fissures . . . . .	52
4.3.1	Définition de la fonction coût . . . . .	54
4.3.2	Paramètres de l'algorithme génétique . . . . .	54
4.3.3	Résultats numériques . . . . .	56
4.4	Application aux courants de Foucault . . . . .	57
4.4.1	Le problème des courants de Foucault en champ électrique . . . . .	58
4.4.2	Comportement asymptotique du champ électrique au voisinage de la fissure	60
4.4.3	La formulation $\mathbf{A} - \psi$ en potentiels combinés . . . . .	62
4.4.4	Discrétisation par éléments finis étendus . . . . .	63
4.5	Conclusion et perspectives . . . . .	67
<b>5</b>	<b>Identification et contrôlabilité</b>	<b>71</b>
5.1	Introduction . . . . .	71
5.2	Contrôlabilité exacte frontière . . . . .	72
5.2.1	L'opérateur HUM . . . . .	73
5.2.2	Discrétisation et résultats numériques . . . . .	75
5.3	Reconstruction de petites imperfections . . . . .	78
5.3.1	Position du problème de reconstruction . . . . .	79
5.3.2	La formule asymptotique d'Ammari . . . . .	80
5.3.3	L'algorithme de reconstruction . . . . .	80
5.4	Conclusion et perspectives . . . . .	82
<b>6</b>	<b>Perspectives et travaux en cours</b>	<b>85</b>
<b>A</b>	<b>Contributions diverses</b>	<b>87</b>
<b>B</b>	<b>Bibliographie personnelle</b>	<b>89</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>90</b>

# Chapitre 1

## Les équations de Maxwell

### 1.1 Modélisation

Les équations de Maxwell sont les équations fondamentales de l'électromagnétisme. Elles s'expriment au moyen de quatre champs, fonctions de la position  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  et du temps  $t \in \mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^3$ ,

- $\mathcal{E}$  : champ électrique,
- $\mathcal{D}$  : champ de déplacement,
- $\mathcal{H}$  : champ magnétique,
- $\mathcal{B}$  : induction magnétique.

En trois dimensions d'espace, les équations de Maxwell s'écrivent

$$\partial_t \mathcal{D} - \text{curl } \mathcal{H} = -\mathcal{J}, \quad (1.1a)$$

$$\partial_t \mathcal{B} + \text{curl } \mathcal{E} = \mathbf{0}, \quad (1.1b)$$

$$\text{div } \mathcal{D} = \rho, \quad (1.1c)$$

$$\text{div } \mathcal{B} = 0, \quad (1.1d)$$

où  $\mathcal{J}$  et  $\rho$  désignent respectivement la densité de courant et la densité de charges. L'équation (1.1a) est la loi d'Ampère avec la correction apportée par Maxwell. Elle exprime le fait que les champs magnétiques peuvent être générés par un courant électrique (loi d'Ampère) ou par la variation d'un champ électrique. La loi de Faraday (1.1b) dit comment la variation d'un champ magnétique peut induire un champ électrique. La loi de Gauss (1.1c) décrit l'effet de la présence de charges électriques sur le champ de déplacement, et la condition sur la divergence (1.1d) exprime qu'il n'existe pas de charges magnétiques.

On déduit des équations de Maxwell l'équation de la conservation de la charge,

$$\text{div } \mathcal{J} + \partial_t \rho = 0. \quad (1.2)$$

Réciproquement, sous l'hypothèse de la conservation des charges, les contraintes sur la divergence (1.1c) et (1.1d) découlent des équations (1.1a) et (1.1b) pourvu que les équations (1.1c) et (1.1d) soient satisfaites en un temps  $t_0$  donné.

Les équations de Maxwell sont supplémentées par deux lois de constitution reliant les champs  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{D}$  d'un côté et  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{B}$  de l'autre. Dans ce mémoire, nous nous limitons à des matériaux linéaires pour lesquelles les lois constitutives s'écrivent

$$\mathcal{D} = \varepsilon \mathcal{E} \quad \text{and} \quad \mathcal{B} = \mu \mathcal{H}. \quad (1.3)$$

Ici,  $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{x})$  et  $\mu = \mu(\mathbf{x})$  désignent respectivement la permittivité électrique et la perméabilité magnétique du matériau. Dans le vide, on a  $\varepsilon = \varepsilon_0$  et  $\mu = \mu_0$  avec  $\varepsilon_0 \approx 8.854 \times 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$  et  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Hm}^{-1}$ . On peut ainsi écrire

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 \text{ et } \mu = \mu_r \mu_0$$

où  $\varepsilon_r$  et  $\mu_r$  sont la permittivité et la perméabilité relatives. Pour un matériau isotrope,  $\varepsilon$  et  $\mu$  sont des fonctions positives bornées uniformément de  $L^\infty(\Omega)$  : il existe des constantes  $\underline{\lambda} > 0$  et  $\bar{\lambda} > 0$  telles que pour presque tout  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ ,

$$\begin{cases} \underline{\lambda} \leq \varepsilon(\mathbf{x}) \leq \bar{\lambda} \text{ et} \\ \underline{\lambda} \leq \mu(\mathbf{x}) \leq \bar{\lambda}. \end{cases} \quad (1.4)$$

Lorsque le matériau est conducteur, le champ électromagnétique induit lui-même des courants. Sous l'hypothèse de la validité de la loi d'Ohm, nous avons alors

$$\mathcal{J} = \sigma \mathcal{E} + \mathcal{J}_s \quad (1.5)$$

où  $\mathcal{J}_s$  est un terme source qui désigne la densité de courant appliquée au système. Le paramètre  $\sigma = \sigma(\mathbf{x})$  est une fonction non négative de la position. On appelle *conducteur* toute partie du domaine où  $\sigma$  est non nulle, et *diélectrique* toute partie où  $\sigma = 0$  et  $\varepsilon \neq \varepsilon_0$ .

En tenant compte des lois de constitution (1.3) et (1.5), les équations de Maxwell s'écrivent

$$\varepsilon \partial_t \mathcal{E} - \text{curl } \mathcal{H} = -\sigma \mathcal{E} - \mathcal{J}_s, \quad (1.6a)$$

$$\mu \partial_t \mathcal{H} + \text{curl } \mathcal{E} = \mathbf{0}, \quad (1.6b)$$

$$\text{div}(\varepsilon \mathcal{E}) = \rho, \quad (1.6c)$$

$$\text{div}(\mu \mathcal{H}) = 0. \quad (1.6d)$$

Elles seront complétées par des conditions initiales  $\mathcal{E}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{E}_0(\mathbf{x})$  et  $\mathcal{H}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{H}_0(\mathbf{x})$  ainsi que par des conditions aux limites appropriées si le problème est posé en domaine borné.

Nous présentons maintenant quelques modèles classiques qui sont dérivés des équations de Maxwell. Conformément aux modèles qui seront traités dans la suite de ce mémoire, nous supposons désormais que la densité de charges  $\rho$  est nulle.

### 1.1.1 Equations de Maxwell du second ordre en régime transitoire

Afin d'éliminer le champ magnétique des équations (1.6), nous dérivons formellement l'équation (1.6a) par rapport au temps. D'après (1.6b), nous avons

$$\text{curl } \partial_t \mathcal{H} = -\text{curl } \mu^{-1} \text{curl } \mathcal{E}$$

ce qui permet d'obtenir les équations de Maxwell du second ordre en régime transitoire,

$$\varepsilon \partial_t^2 \mathcal{E} + \sigma \partial_t \mathcal{E} + \text{curl } \mu^{-1} \text{curl } \mathcal{E} = -\partial_t \mathcal{J}_s, \quad (1.7a)$$

$$\text{div}(\varepsilon \mathcal{E}) = 0. \quad (1.7b)$$

Dans un diélectrique où la conductivité est nulle, et en absence d'un courant source  $\mathcal{J}_s$ , les équations s'écrivent

$$\varepsilon \partial_t^2 \mathcal{E} + \text{curl } \mu^{-1} \text{curl } \mathcal{E} = \mathbf{0}, \quad (1.8a)$$

$$\text{div}(\varepsilon \mathcal{E}) = 0, \quad (1.8b)$$

et les conditions initiales sont données par

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{E}_0(\mathbf{x}), \quad \partial_t \mathcal{E}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{E}_1(\mathbf{x}), \quad (1.9)$$

avec  $\varepsilon \mathbf{E}_1 = \text{curl } \mathbf{H}_0$ . Nous remarquons la similitude de (1.8a) avec l'équation des ondes.

### 1.1.2 Equations de Maxwell en régime harmonique

Lorsque le terme source  $\mathcal{J}_s$  varie de façon sinusoïdale en temps, nous pouvons établir le modèle réduit des équations de Maxwell en régime harmonique. Pour cela, soit  $\omega > 0$  la pulsation des vibrations et supposons que

$$\mathcal{J}_s(\mathbf{x}, t) = \Re e(\mathbf{J}_s(\mathbf{x})e^{-i\omega t}). \quad (1.10a)$$

Le champ électromagnétique est dit harmonique en temps si l'on peut écrire

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}, t) = \Re e(\mathbf{E}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}), \quad (1.10b)$$

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, t) = \Re e(\mathbf{H}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}). \quad (1.10c)$$

Ici, les champs  $\mathbf{J}_s$ ,  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  ne dépendent que de la position  $\mathbf{x}$  et sont des fonctions à valeurs dans  $\mathbb{C}^3$ . Sous l'hypothèse des lois constitutives (1.3) et (1.5), nous obtenons *les équations de Maxwell harmoniques en temps*,

$$-i\omega\varepsilon\mathbf{E} - \text{curl}\mathbf{H} = -\sigma\mathbf{E} - \mathbf{J}_s, \quad (1.11a)$$

$$-i\omega\mu\mathbf{H} + \text{curl}\mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad (1.11b)$$

$$\text{div}(\varepsilon\mathbf{E}) = 0, \quad (1.11c)$$

$$\text{div}(\mu\mathbf{H}) = 0. \quad (1.11d)$$

L'élimination du champ magnétique conduit aux équations en champ électrique,

$$\text{curl}\mu^{-1}\text{curl}\mathbf{E} - \omega^2\varepsilon_\sigma\mathbf{E} = i\omega\mathbf{J}_s \quad (1.12)$$

où  $\varepsilon_\sigma = \varepsilon + \frac{i\sigma}{\omega}$  est une fonction à valeurs dans  $\mathbb{C}$ .

### 1.1.3 Conditions aux limites

De façon générale, les équations de Maxwell décrivent le champ électromagnétique dans l'espace entier  $\mathbb{R}^3$ . De nombreuses configurations permettent pourtant de ne considérer les champs que dans un domaine borné. Nous présentons dans cette section les deux cas de figures qui nous intéresseront dans la suite, à savoir le cas du conducteur parfait et la condition d'impédance.

Il découle des équations de Maxwell que la composante tangentielle du champ électrique  $\mathcal{E}$  est continue à travers toute interface entre deux matériaux de paramètres électromagnétiques différents. Supposons dans un premier temps que l'un des matériaux soit un conducteur parfait ce qui correspond à la situation idéalisée où  $\sigma = \infty$ . D'après la loi d'Ohm, il faut alors que le champ électrique  $\mathcal{E}$  s'annule faute de quoi la densité de courant  $\mathcal{J}$  sera non bornée. La continuité de la trace tangentielle de  $\mathcal{E}$  à travers l'interface du matériau avec le conducteur parfait conduit finalement à la condition aux limites dite de *conducteur parfait*

$$\mathcal{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sur l'interface} \quad (1.13)$$

où  $\mathbf{n}$  désigne le vecteur normal unitaire pointant vers le conducteur parfait.

La deuxième configuration consiste à considérer un conducteur réel qui laisse pénétrer le champ sur une petite distance :

$$\mathbf{n} \times (\mathcal{E} \times \mathbf{n}) + \lambda(\mathbf{n} \times \mu^{-1}\text{curl}\mathcal{E}) = \mathbf{0} \quad \text{sur l'interface}, \quad (1.14)$$

où  $\lambda$  est une fonction définie sur l'interface telle que  $\Re e \lambda < 0$  et  $\Im m \lambda > 0$ . En régime harmonique, la fonction  $\lambda$  est proportionnelle à l'impédance surfacique  $Z_s$  et ne dépend que des paramètres électromagnétiques du milieu extérieur :

$$\lambda = \frac{iZ_s}{\omega} = \frac{1}{2}(i-1)\delta\mu_{\text{ext}}$$

où  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_{\text{ext}}\sigma_{\text{ext}}}}$  désigne la profondeur de peau du milieu extérieur sous l'hypothèse  $\varepsilon_{\text{ext}}\omega \ll \sigma_{\text{ext}}$ . La condition (1.14) est appelée *condition d'impédance* ou *condition de Leontovich* [72].

**Remarque 1.1.** Dans le contexte de la diffraction d'onde par un obstacle, (1.14) apparaît comme une condition aux limites absorbante du premier ordre pour le champ diffracté en prenant  $\lambda = \frac{i}{\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ .

### 1.1.4 Remarques sur les équations de Maxwell en dimension 2

Les résultats numériques présentés dans ce mémoire ont été obtenus pour un domaine de calcul bidimensionnel, même si en général, le cas 3D a été traité en théorie. C'est pourquoi nous rappelons ici les équations de Maxwell en deux dimensions d'espace. Pour cela, nous supposons que le domaine en considération est invariant et infini dans la direction  $\vec{Oz}$ . Dans le cas d'une configuration *transverse électrique*, la densité de courant et le champ électrique sont parallèles au plan  $Oxy$  et s'expriment au moyen de deux composantes invariantes par rapport à  $z$  :

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_1(x, y, t) \\ \mathcal{J}_2(x, y, t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1(x, y, t) \\ \mathcal{E}_2(x, y, t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le champ magnétique quant à lui est orienté dans la direction  $\vec{Oz}$  :  $\mathcal{H}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathcal{H}_3(x, y, t) \end{pmatrix}$ . En prenant le rotationnel des champs  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{H}$  ainsi définis, il vient que

$$\text{curl } \mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_1 \mathcal{E}_2 - \partial_2 \mathcal{E}_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{curl } \mathcal{H} = \begin{pmatrix} \partial_2 \mathcal{H}_3 \\ -\partial_1 \mathcal{H}_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui nous amène à introduire deux rotationnels  $\text{curl}$  et  $\mathbf{curl}$ , le premier agissant sur des champs de vecteurs à deux composantes, le deuxième étant défini pour des fonctions scalaires. Ainsi, pour un champ de vecteurs  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^t$  défini sur un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\text{curl } \mathbf{v}$  est la fonction scalaire

$$\text{curl } \mathbf{v} = \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \tag{1.15}$$

tandis que  $\mathbf{curl} \varphi$  est défini pour une fonction scalaire  $\varphi$  par le champ de vecteurs,

$$\mathbf{curl} \varphi = \begin{pmatrix} \partial_2 \varphi \\ -\partial_1 \varphi \end{pmatrix}. \tag{1.16}$$

Il est possible de définir une configuration *transverse magnétique* en inversant les rôles de  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{H}$ .

A titre d'exemple, nous réécrivons les équations de Maxwell en régime harmonique dans la configuration transverse électrique :

$$\mathbf{curl} \mu^{-1} \text{curl } \mathbf{E} - \omega^2 \varepsilon_\sigma \mathbf{E} = i\omega \mathbf{J}_s \tag{1.17}$$

où  $\mathbf{E} = (E_1, E_2)^t$  et  $\mathbf{J} = (J_1, J_2)^t$  ne dépendent que de  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

## 1.2 Espaces fonctionnels et notations

Dans cette section, nous introduisons les principaux espaces fonctionnels utilisés dans le cadre des équations de Maxwell. Les espaces relatifs à l'étude d'une méthode spécifique seront définis

en temps utile dans les chapitres correspondants. Selon le contexte du problème, on considérera des fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}$  (régime transitoire) ou dans  $\mathbb{C}$  (régime harmonique).

Les travaux qui sont résumés dans ce mémoire concernent les équations de Maxwell en domaine borné. Soit alors  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^d$  avec  $d = 2$  ou  $d = 3$ . Dans la pratique, nous supposons en général que  $\Omega$  est un polygone ( $d = 2$ ) ou un polyèdre lipschitzien ( $d = 3$ ) ce qui implique que la frontière  $\partial\Omega$  est affine par morceaux ( $d = 2$ ) ou plane par morceaux ( $d = 3$ ).

Nous notons  $L^2(\Omega)$  l'espace des fonctions de carré intégrable définies sur  $\Omega$  muni du produit scalaire

$$(u, v) = \int_{\Omega} uv \, dx.$$

Pour  $m \in \mathbb{N}$ ,  $H^m(\Omega)$  désigne l'espace de Sobolev usuel des fonctions ayant des dérivées dans  $L^2(\Omega)$  jusqu'à l'ordre  $m$ . Les espaces de Sobolev d'ordre fractionnaire sont définis de la façon suivante : soit  $s \in \mathbb{R}^+$  non entier tel que  $s = m + \sigma$  avec  $m \in \mathbb{N}$  et  $0 < \sigma < 1$ . Alors,

$$H^s(\Omega) = \left\{ u \in H^m(\Omega) \left| \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|D^{\alpha}u(\mathbf{x}) - D^{\alpha}u(\mathbf{y})|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{d+2\sigma}} \, d\mathbf{x}d\mathbf{y} < \infty \, \forall |\alpha| = m \right. \right\} \quad (1.18)$$

où  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$  est un multi-indice de dimension  $d$ . Pour tout  $s > 0$ ,  $H_0^s(\Omega)$  est l'adhérence de  $\mathcal{D}(\Omega)$  pour la norme de  $H^s$ , et on note  $H^{-s}(\Omega)$  son dual. Nous désignons par  $\tilde{H}^s(\Omega)$  l'espace des fonctions  $u \in H^s(\Omega)$  dont l'extension par zéro appartient à  $H^s(\mathbb{R}^d)$  (cf. [60]). Notons que les espaces  $\tilde{H}^s(\Omega)$  et  $H_0^s(\Omega)$  coïncident si  $s - 1/2 \notin \mathbb{N}$ , mais que pour la définition des traces, nous aurons précisément besoin des espaces  $\tilde{H}^s$  ainsi que de leurs duaux  $\tilde{H}^{-s}$  dans le cas  $s = 1/2, 3/2, \dots$

La notation en gras  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  (resp.  $\mathbf{H}^s(\Omega)$ ) est utilisée pour l'espace des champs de vecteurs à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  ou  $\mathbb{C}^d$  dont chaque composante appartient à  $L^2(\Omega)$  (resp.  $H^s(\Omega)$ ).

Dans le contexte des équations de Maxwell, l'espace des champs à énergie finie est donné par

$$\mathcal{H}(\text{curl}; \Omega) = \{ \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \mid \text{curl } \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \}.$$

Remarquons qu'en deux dimensions d'espace, la condition définissant  $\mathcal{H}(\text{curl}; \Omega)$  se lit  $\text{curl } \mathbf{u} \in L^2(\Omega)$  puisque  $\text{curl } \mathbf{u}$  est une fonction scalaire. Les éléments de  $\mathcal{H}(\text{curl}; \Omega)$  admettent une trace tangentielle : en effet, notons  $\gamma_t$  l'application définie sur  $(C^\infty(\Omega))^d$  par  $\gamma_t(\mathbf{v}) = \mathbf{n} \times \mathbf{v}|_{\partial\Omega}$ . On démontre (cf. [83]) que  $\gamma_t$  peut être prolongée par continuité en une application de  $\mathcal{H}(\text{curl}; \Omega)$  dans  $\mathbf{H}^{-1}(\partial\Omega)$ . On a alors la formule de Green

$$\int_{\Omega} \text{curl } \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \text{curl } \mathbf{w} \, dx + \langle \gamma_t(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle_{\partial\Omega} \quad (1.19)$$

pour tous  $\mathbf{v} \in \mathcal{H}(\text{curl}; \Omega)$  et  $\mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ . Nous introduisons alors les sous-espaces de  $\mathcal{H}(\text{curl}; \Omega)$  des champs à trace tangentielle nulle sur toute ou une partie du bord,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0(\text{curl}; \Omega) &= \{ \mathbf{u} \in \mathcal{H}(\text{curl}; \Omega) \mid \gamma_t(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \}, \\ \mathcal{H}_{0,D}(\text{curl}; \Omega) &= \{ \mathbf{u} \in \mathcal{H}(\text{curl}; \Omega) \mid \gamma_t(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \text{ sur } D \subset \partial\Omega \}. \end{aligned}$$

Afin de traiter convenablement la loi de Gauss (1.1c), nous introduisons l'espace

$$\mathcal{H}(\text{div } \varepsilon; \Omega) = \{ \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \mid \text{div}(\varepsilon \mathbf{u}) \in L^2(\Omega) \}$$

où  $\varepsilon$  est une fonction de  $L^\infty(\Omega)$ . Lorsque  $\varepsilon$  est constante sur  $\Omega$ , nous retrouvons l'espace classique  $\mathcal{H}(\text{div}; \Omega)$ . De façon analogue à la définition de l'opérateur  $\gamma_t$ , on peut définir l'opérateur de trace normale  $\gamma_n$  par l'extension de l'application  $\gamma_n(\mathbf{v}) = \mathbf{v}|_{\partial\Omega} \cdot \mathbf{n}$  de  $(C^\infty(\Omega))^d$  à  $\mathcal{H}(\text{div}; \Omega)$ . Ceci permet d'introduire les espaces

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0(\text{div } \varepsilon; \Omega) &= \{ \mathbf{u} \in \mathcal{H}(\text{div } \varepsilon; \Omega) \mid \gamma_n(\varepsilon \mathbf{u}) = 0 \}, \\ \mathcal{H}_{0,D}(\text{div } \varepsilon; \Omega) &= \{ \mathbf{u} \in \mathcal{H}(\text{div } \varepsilon; \Omega) \mid \gamma_n(\varepsilon \mathbf{u}) = 0 \text{ sur } D \subset \Omega \}. \end{aligned}$$

L'espace des champs à divergence nulle sera défini par

$$\mathcal{H}(\operatorname{div}^0; \Omega) = \{ \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \mid \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega \}$$

ou encore  $\mathcal{H}(\operatorname{div} \varepsilon^0; \Omega)$  si  $\varepsilon$  n'est pas constant.

Pour les problèmes en régime transitoire, il est nécessaire de préciser non seulement la régularité en espace, mais aussi celle en temps. Nous noterons  $\mathcal{C}^k(0, T; V)$  (resp.  $H^s(0, T; V)$ ) l'espace des champs pour lesquels l'application  $t \mapsto \mathbf{u}(\cdot, t)$  définie sur l'intervalle  $(0, T)$  est à valeurs dans l'espace  $V$  et de classe  $\mathcal{C}^k$  (resp.  $H^s$ ).

### 1.3 Formulations variationnelles classiques

Nous donnons dans cette section quelques résultats classiques relatifs aux formulations variationnelles des problèmes en régime transitoire et harmonique dans l'espace d'énergie  $\mathcal{H}(\operatorname{curl}; \Omega)$ .

#### 1.3.1 Formulation variationnelle en régime harmonique

La formulation variationnelle du problème en régime harmonique avec condition de conducteur parfait est posée sur l'espace  $\mathcal{H}_0(\operatorname{curl}; \Omega) \cap \mathcal{H}(\operatorname{div} \varepsilon^0; \Omega)$  des champs à divergence nulle :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{E} \in \mathcal{H}_0(\operatorname{curl}; \Omega) \cap \mathcal{H}(\operatorname{div} \varepsilon^0; \Omega) \text{ tel que} \\ (\mu^{-1} \operatorname{curl} \mathbf{E}, \operatorname{curl} \mathbf{F}) - \omega^2(\varepsilon_\sigma \mathbf{E}, \mathbf{F}) = i\omega(\mathbf{J}_s, \mathbf{F}) \quad \forall \mathbf{F} \in \mathcal{H}_0(\operatorname{curl}; \Omega) \cap \mathcal{H}(\operatorname{div} \varepsilon^0; \Omega). \end{cases} \quad (1.20)$$

Lorsque  $\sigma(\mathbf{x}) > \underline{\sigma}$  pour presque tout  $\mathbf{x} \in \Omega$ , la forme sesqui-linéaire de (1.20) est coercive sur  $\mathcal{H}_0(\operatorname{curl}; \Omega) \cap \mathcal{H}(\operatorname{div} \varepsilon^0; \Omega)$ . En effet, dans le plan complexe les coefficients  $\mu^{-1} \in \mathbb{R}^+$  et  $-\omega^2 \varepsilon_\sigma \in \mathbb{C}$  sont contenus dans un secteur dont l'angle d'ouverture est strictment plus petit que  $\pi$ . Une rotation permet de les ramener dans le demi-plan  $\Re z > 0$ . Par conséquent, il existe  $\theta \in (0, \pi)$  tel que

$$\Re \left( e^{i\theta/2} \left( (\mu^{-1} \operatorname{curl} \mathbf{u}, \operatorname{curl} \mathbf{u}) - \omega^2(\varepsilon_\sigma \mathbf{u}, \mathbf{u}) \right) \right) \gtrsim \|\mathbf{u}\|_{0,\Omega}^2 + \|\operatorname{curl} \mathbf{u}\|_{0,\Omega}^2$$

quel que soit  $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_0(\operatorname{curl}; \Omega) \cap \mathcal{H}(\operatorname{div} \varepsilon^0; \Omega)$  [62]. Le problème variationnel (1.20) admet alors une solution unique pourvu que  $\mathbf{J}_s \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ .

Une étude complète des questions d'existence et d'unicité du problème en régime harmonique peut être trouvée dans [83]. Celle-ci traite des configurations avec condition d'impédance et aborde le cas de coefficients réguliers par morceaux.

#### 1.3.2 Formulation variationnelle en régime transitoire

L'étude des équations de Maxwell du second ordre en régime transitoire (1.7) se fait habituellement en utilisant la théorie variationnelle de Lions-Magenes [75] ou le théorème de Lumer-Phillips dans le cadre de la théorie des semi-groupes [89]. Le cadre fonctionnel naturel du problème (1.7) avec condition du conducteur parfait et conditions initiales  $\{\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_1\}$  est donné par l'espace

$$Y = (\mathcal{H}_0(\operatorname{curl}; \Omega) \cap \mathcal{H}(\operatorname{div} \varepsilon^0; \Omega)) \times \mathcal{H}(\operatorname{div} \varepsilon^0; \Omega) \quad (1.21)$$

dans le sens où (1.7) admet une unique solution

$$\mathcal{E} \in \mathcal{C}^0(0, T; \mathcal{H}_0(\operatorname{curl}; \Omega) \cap \mathcal{H}(\operatorname{div} \varepsilon^0; \Omega)) \cap \mathcal{C}^1(0, T; \mathcal{H}(\operatorname{div} \varepsilon^0; \Omega))$$

quel que soit le couple de données initiales  $\{\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_1\} \in Y$  pourvu que le terme source  $\mathcal{J}_s$  soit tel que  $\partial_t \mathcal{J}_s \in L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$  (cf. par exemple [13]).

## 1.4 Potentiels scalaire et vecteur

La décomposition du champ électromagnétique en un potentiel vecteur et un potentiel scalaire est un outil important dans l'analyse théorique et numérique des équations de Maxwell. Elle dépend de façon essentielle de la topologie du domaine  $\Omega$  et de sa frontière  $\partial\Omega$  ainsi que des propriétés des coefficients  $\varepsilon$ ,  $\sigma$  et  $\mu$ .

Le résultat fondamental suivant est classique (cf. [56, 83]).

### Théorème 1.1. [Champs à rotationnel nul]

*Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  un domaine lipschitzien borné et simplement connexe. Le champ  $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  vérifie  $\text{curl } \mathbf{u} = 0$  dans  $\Omega$  si et seulement s'il existe un potentiel scalaire  $p \in H^1(\Omega)$ , unique à une constante additive près, tel que  $\mathbf{u} = \nabla p$ .* □

D'après le théorème 1.1, on peut choisir le potentiel scalaire  $p$  dans l'espace  $H_0^1(\Omega)$  pourvu que le bord de  $\Omega$  soit connexe. Dans le cas général où  $\partial\Omega$  a plusieurs composantes connexes, on déduit du théorème 1.1 le

### Corollaire 1.1.

*Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  un domaine lipschitzien borné et simplement connexe. Supposons que la frontière  $\partial\Omega$  de  $\Omega$  est composée de  $P+1$  composantes connexes,  $\Gamma_0, \dots, \Gamma_P$ . Si  $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_0(\text{curl}; \Omega)$  vérifie  $\text{curl } \mathbf{u} = 0$ , alors il existe  $p \in H^1(\Omega)$  et des constantes  $c_1, \dots, c_P$  tels que  $\mathbf{u} = \nabla p$  avec  $p = 0$  sur  $\Gamma_0$  et  $p = c_j$  sur  $\Gamma_j$  pour  $j = 1, \dots, P$ .* □

Le théorème suivant caractérise les champs à divergence nulle (cf. [9]).

### Théorème 1.2. [Champs à divergence nulle]

*Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  un domaine lipschitzien borné, simplement connexe et à frontière connexe. Soit  $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ . Alors*

1.  $\text{div } \mathbf{u} = 0$  dans  $\Omega$  si et seulement s'il existe  $\boldsymbol{\psi} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$  tel que

$$\begin{aligned} \text{curl } \boldsymbol{\psi} &= \mathbf{u} && \text{dans } \Omega, \\ \text{div } \boldsymbol{\psi} &= 0 && \text{dans } \Omega. \end{aligned} \tag{1.22}$$

2.  $\text{div } \mathbf{u} = 0$  dans  $\Omega$  si et seulement s'il existe  $\boldsymbol{\psi} \in \mathcal{H}(\text{curl}; \Omega)$  tel que

$$\begin{aligned} \text{curl } \boldsymbol{\psi} &= \mathbf{u} && \text{dans } \Omega, \\ \text{div } \boldsymbol{\psi} &= 0 && \text{dans } \Omega, \\ \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{n} &= 0 && \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1.23}$$

3.  $\text{div } \mathbf{u} = 0$  dans  $\Omega$  et  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  sur  $\partial\Omega$  si et seulement s'il existe  $\boldsymbol{\psi} \in \mathcal{H}(\text{curl}; \Omega)$  tel que

$$\begin{aligned} \text{curl } \boldsymbol{\psi} &= \mathbf{u} && \text{dans } \Omega, \\ \text{div } \boldsymbol{\psi} &= 0 && \text{dans } \Omega, \\ \boldsymbol{\psi} \times \mathbf{n} &= 0 && \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1.24}$$

□

On appelle communément *décomposition de Helmholtz* une décomposition d'un champ en un gradient et un rotationnel. Dans le cas d'un domaine simplement connexe à frontière connexe, cette décomposition peut se formuler ainsi (cf. [83]) :

**Théorème 1.3. [Décomposition de Helmholtz]**

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  un domaine lipschitzien borné, simplement connexe et à frontière connexe. Soit  $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ . Alors il existe un potentiel scalaire  $p \in H_0^1(\Omega)$  et un potentiel vecteur  $\mathbf{A} \in \{\mathbf{u} \in \mathcal{H}(\text{curl}; \Omega) \mid \text{div } \mathbf{u} = 0, \gamma_n(\mathbf{u}) = 0\}$  tels que

$$\mathbf{u} = \text{curl } \mathbf{A} + \nabla p. \quad (1.25)$$

□

Dans le cas d'une frontière composée de plusieurs composantes connexe, on peut aisément reformuler le résultat du théorème 1.3 à l'aide du corollaire 1.1. Le cas d'un domaine non simplement connexe est plus difficile. On trouve des décompositions de Helmholtz pour ce type de configurations par exemple dans [9, 29, 64, 3].

## 1.5 Discrétisation

### 1.5.1 Éléments finis d'arête

La discrétisation en espace des équations de Maxwell se fait habituellement par les éléments finis d'arête qui sont conformes dans  $\mathcal{H}(\text{curl}; \Omega)$ . La construction de ces éléments est due à Nédélec [84], même si on trouve une définition de l'espace des éléments d'ordre 1 chez d'autres auteurs, en particulier chez Whitney [106]. Comme leur nom indique, les éléments d'arête (d'ordre 1) sont associés aux arêtes du maillage, contrairement aux éléments finis de Lagrange dont les degrés de liberté sont situés aux nœuds du maillage. Une présentation des éléments finis d'arête en trois dimensions d'espace peut être trouvée dans [83] et inclut les éléments d'ordre plus élevé. En vue des simulations numériques que nous allons présenter dans la suite de ce document, nous donnons ici un bref aperçu de la construction des éléments d'arête d'ordre 1 *en dimensions 2 et 3*.

Soit alors  $\mathcal{T}_h = (K_\ell)_\ell$  un maillage de triangles (resp. tétraèdres) du domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  où  $d = 2$  (resp.  $d = 3$ ). Nous supposons que le maillage vérifie les hypothèses habituelles de régularité. Notons  $\mathcal{E}$  l'ensemble des arêtes du maillage, et pour toute arête  $e \in \mathcal{E}$ , désignons un vecteur unitaire  $\tau_e$  tangent à  $e$  ce qui fixe une orientation de  $e$ . Dans la suite, nous écrirons souvent  $\tau$  à la place de  $\tau_e$  s'il n'y a pas de confusion possible.

L'espace d'approximation locale sur un élément  $K \in \mathcal{T}_h$  est le sous-espace de  $(\mathbb{P}_1(K))^d$  défini par

$$\mathcal{R}_K = \left\{ \mathbf{a}_0 + \mathbf{p} \mid \mathbf{a}_0 \in \mathbb{R}^d, \mathbf{p} \in (\tilde{\mathbb{P}}_1(K))^d \text{ tel que } \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = 0 \right\}. \quad (1.26)$$

Ici,  $\tilde{\mathbb{P}}_1(K) = \left\{ p(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^d a_i x_i \mid a_i \in \mathbb{R} \right\}$  désigne l'espace des polynômes homogènes de degré 1 et  $\mathbf{x} = (x_i)_{i=1:d}$  est le vecteur des coordonnées dans  $\mathbb{R}^d$ . On peut noter qu'en dimension 2,  $\mathcal{R}_K$  est donné par

$$\mathcal{R}_K = \left\{ \mathbf{a}_0 + b \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} \mid \mathbf{a}_0 \in \mathbb{R}^2, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

L'élément fini d'arête de référence d'ordre 1 est alors le triplet  $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$  défini par

- $\hat{K} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid x_i \geq 0 \forall i = 1 : d \text{ et } \sum_{i=1}^d x_i \leq 1 \right\}$ , le triangle (resp. tétraèdre) de référence,
- $\hat{P} = \mathcal{R}_{\hat{K}}$ ,
- $\hat{\Sigma} = \left\{ \ell_{\hat{e}} : (L^1(\hat{e}))^d \rightarrow \mathbb{R} \mid \ell_{\hat{e}}(\hat{\mathbf{u}}) = \int_{\hat{e}} \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}} d\hat{s}, \text{ pour toute arête } \hat{e} \text{ de } \hat{K} \right\}$ .

Comme nous travaillons avec des champs de vecteurs, il convient de préciser la transformation des éléments de  $\mathcal{R}_K$  : soit  $\hat{\mathbf{u}} \in \mathcal{R}_{\hat{K}}$  et  $\mathcal{F}_K$  la transformation affine de  $\hat{K}$  sur un élément  $K \in \mathcal{T}_h$ , alors

$$\mathbf{u} \circ \mathcal{F}_K = (B_K^t)^{-1} \hat{\mathbf{u}}, \quad (1.27)$$

où  $B_K \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  désigne la matrice de l'application  $\mathcal{F}_K$ . La formule (1.27) conduit à des formules de transformation de curl  $\mathbf{u}$  qui diffèrent selon la dimension d'espace. Ainsi, on a

$$\mathbf{2D} : \quad \operatorname{curl} \mathbf{u} = \frac{1}{\det(B_K)} \hat{\operatorname{curl}} \hat{\mathbf{u}}, \quad (1.28)$$

$$\mathbf{3D} : \quad \operatorname{curl} \mathbf{u} = \frac{1}{\det(B_K)} B_K \hat{\operatorname{curl}} \hat{\mathbf{u}}. \quad (1.29)$$

On montre que pour tout  $\hat{\mathbf{u}} \in \mathcal{R}_{\hat{K}}$ , le champ  $\mathbf{u} \circ \mathcal{F}_K$  appartient à  $\mathcal{R}_K$ . On a également l'invariance des degrés de liberté :

$$\int_e \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} ds = \int_{\hat{e}} \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}} d\hat{s}, \quad (1.30)$$

ce qui permet la définition de l'élément fini d'arête  $(K, \mathcal{R}_K, \Sigma_K)$  dans le plan physique où

$$\Sigma_K = \left\{ \ell_e : (L^1(e))^d \rightarrow \mathbb{R} \mid \ell_e(\mathbf{u}) = \int_e \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} ds, \text{ pour toute arête } e \text{ de } K \right\}.$$

Le triplet  $(K, \mathcal{R}_K, \Sigma_K)$  vérifie la propriété d'unisolance et conduit à l'espace de discrétisation

$$X_h^{\text{edge}} = \{ \mathbf{u} \in \mathcal{H}(\operatorname{curl}; \Omega) \mid \mathbf{u}|_K \in \mathcal{R}_K \forall K \in \mathcal{T}_h \}.$$

Les fonctions de base  $(\mathbf{w}_e)_{e \in \mathcal{E}}$  de  $X_h^{\text{edge}}$  sont définies par

$$\begin{cases} \mathbf{w}_e|_K \in \mathcal{R}_K \forall K \in \mathcal{T}_h, \\ \ell_{e'}(\mathbf{w}_e) = \delta_{ee'}. \end{cases}$$

Sur chaque élément  $K \in \mathcal{T}_h$ , nous sommes en mesure de définir l'interpolée locale  $r_K \mathbf{u}$  d'un champ  $\mathbf{u}$  suffisamment régulier comme l'unique élément de  $\mathcal{R}_K$  vérifiant

$$\ell_e(\mathbf{u} - r_K \mathbf{u}) = 0 \text{ pour toute arête } e \text{ de } K. \quad (1.31)$$

L'interpolée globale  $r_h \mathbf{u} \in X_h^{\text{edge}}$  est alors donnée élément par élément par

$$(r_h \mathbf{u})|_K = r_K \mathbf{u}|_K \quad \forall K \in \mathcal{T}_h. \quad (1.32)$$

Nous avons

$$r_h \mathbf{u} = \sum_{e \in \mathcal{E}} \ell_e(\mathbf{u}) \mathbf{w}_e$$

pour tout champ  $\mathbf{u}$  pour lequel  $\ell_e(\mathbf{u})$  est bien défini quelle que soit l'arête  $e$ .

Sur un maillage régulier de paramètre  $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} \operatorname{diam}(K)$ , on montre (cf. [83], Théorème 5.41) que l'erreur d'interpolation  $\mathbf{u} - r_h \mathbf{u}$  vérifie l'estimation

$$\| \mathbf{u} - r_h \mathbf{u} \|_{\mathcal{H}(\operatorname{curl}; \Omega)} \lesssim h (\| \mathbf{u} \|_{1, \Omega} + \| \operatorname{curl} \mathbf{u} \|_{1, \Omega}) \quad (1.33)$$

pour tout champ  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$  à rotationnel dans  $\mathbf{H}^1(\Omega)$ .

### 1.5.2 Décomposition de Helmholtz discrète

Nous avons vu (Théorème 1.3) que tout champ de  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  se décompose en un potentiel vecteur à divergence nulle et le gradient d'un potentiel scalaire. Dans cette section, nous développons brièvement les outils qui permettent d'obtenir une décomposition analogue au niveau discret.

Soit l'espace de discrétisation des éléments finis de Lagrange de type P1,

$$U_h = \{ p_h \in H^1(\Omega) \mid p_h|_K \in \mathbb{P}_1(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \} \quad (1.34)$$

et son sous-espace

$$S_h = U_h \cap H_0^1(\Omega) \quad (1.35)$$

qui contient la condition aux limites de Dirichlet. Nous avons (cf. [83], Théorème 5.49)

$$\nabla U_h \subset X_h^{\text{edge}}$$

ce qui permet d'écrire la décomposition

$$X_h^{\text{edge}} = X_h^{\text{edge},0} \oplus \nabla S_h, \quad (1.36)$$

où l'orthogonalité de la décomposition s'entend au sens du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_\varepsilon = (\varepsilon \cdot, \cdot)$ . Nous obtenons le

**Théorème 1.4. [Décomposition de Helmholtz discrète]**

*Tout champ  $\mathbf{u}_h \in X_h^{\text{edge}}$  s'écrit*

$$\mathbf{u}_h = \mathbf{u}_{h,0} + \nabla p_h$$

*avec  $p_h \in S_h$  et  $\mathbf{u}_{h,0} \in X_h^{\text{edge}}$  est tel que*

$$(\varepsilon \mathbf{u}_{h,0}, \nabla q_h) = 0 \forall q_h \in S_h. \quad (1.37)$$

□

## Chapitre 2

# Méthodes pour matériaux composites – Comment tenir compte des singularités géométriques en électromagnétisme

### 2.1 Introduction

Ce chapitre résume la partie de mes travaux dont la thématique est issue de ma thèse. Il concerne les publications

- [LN00] S. LOHRENGEL ET S. NICAISE, Les équations de Maxwell dans des matériaux composites : problèmes de densité, *C. R. Acad. Sc. Paris, Série I* **330** (2000), pp. 991–996.
- [HL02] C. HAZARD ET S. LOHRENGEL, A singular field method for Maxwell’s equations : numerical aspects for 2D magnetostatics, *SIAM J. Numer. Anal.* **40**, 3 (2002), pp. 1021–1040.
- [LN02] S. LOHRENGEL ET S. NICAISE, Singularities and density problems for composite materials in electromagnetism, *Commun. PDE* **27**, 7&8 (2002), pp. 1575–1623.
- [LN07] S. LOHRENGEL ET S. NICAISE, A discontinuous Galerkin method on refined meshes for the 2D time-harmonic Maxwell equations in composite materials, *J. Comput. Appl. Math.* **206** (2007), pp. 27–54.
- [CLLN10] P. CIARLET JR., F. LEFÈVRE, S. LOHRENGEL ET S. NICAISE, Weighted regularization for composite materials in electromagnetism, *M2AN Math. Meth. Numer. Anal.* **44** (2010), no. 1, pp. 75–108.

Nous considérons ici le cas où le champ électromagnétique se propage dans un domaine composé de plusieurs matériaux homogènes. Lorsque les sous-domaines occupés par les différents matériaux sont des polyèdres dans  $\mathbb{R}^3$ , le champ électromagnétique présente des singularités aux coins et aux arêtes des interfaces. On trouve une description détaillée du comportement asymptotique du champ électromagnétique en présence d’interfaces dans [45].

La stratégie la plus simple pour prendre en compte numériquement les singularités d’un champ consiste à raffiner le maillage du domaine de calcul au voisinage des singularités géométriques. Dans la plupart des codes commerciaux, ceci se fait par une adaptation automatique du maillage. Néanmoins, dans certains cas cette stratégie est vouée à l’échec, et c’est notamment le cas lorsque l’on discrétise les équations de Maxwell (plus précisément une formulation régularisée de celles-ci) par éléments finis de Lagrange conformes dans  $H^1$ . Expliquons brièvement l’origine du problème dans le cas de coefficients  $\varepsilon$  et  $\mu$  constants ce qui représente un matériau homogène.

Suivant les idées de Werner [105] et Leis [71], Hazard et Lenoir ont démontré dans [62] que le problème en régime harmonique (1.20) admettait une formulation régularisée qui s’écrit comme

suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{E} \in \mathcal{H}_0(\text{curl}; \Omega) \cap \mathcal{H}(\text{div}; \Omega) \text{ tel que} \\ (\mu^{-1} \text{curl } \mathbf{E}, \text{curl } \mathbf{F}) + (\text{div } \mathbf{E}, \text{div } \mathbf{F}) + (\varepsilon_\sigma \mathbf{E}, \mathbf{F}) = i\omega(\mathbf{J}_s, \mathbf{F}) \\ \forall \mathbf{F} \in \mathcal{H}_0(\text{curl}; \Omega) \cap \mathcal{H}(\text{div}; \Omega) . \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Il est à noter qu'à la différence du problème (1.20), la contrainte  $\text{div } \mathbf{E} = 0$  ne figure plus dans l'espace fonctionnel de la formulation. On la retrouve de façon implicite en prenant dans (2.1) des champs test qui sont des gradients. La discrétisation de (2.1) par éléments finis de Lagrange conformes dans  $H^1$  conduit alors à une méthode qui converge vers la solution du problème physique (1.20) *si et seulement si* le domaine  $\Omega$  est régulier ou convexe. Lorsque  $\Omega$  est un polygone ou polyèdre non convexe, la méthode des éléments finis de Lagrange converge toujours, mais la limite *n'est pas la solution des équations de Maxwell* . . . . En effet, on peut établir une deuxième formulation régularisée, posée cette fois sur l'espace des champs 'réguliers'

$$V_R = \{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \mid \gamma_t \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \} .$$

D'après les résultats de [41],  $V_R$  est un sous-espace fermé de  $\mathcal{H}_0(\text{curl}; \Omega) \cap \mathcal{H}(\text{div}; \Omega)$  qui ne coïncide avec ce dernier que dans le cas où le domaine  $\Omega$  est régulier ou lipschitzien et convexe. Lorsque  $\Omega$  est un polygone non convexe, on peut déterminer explicitement des champs localisés au voisinage des coins rentrants qui sont dans  $\mathcal{H}_0(\text{curl}; \Omega) \cap \mathcal{H}(\text{div}; \Omega)$ , mais pas dans  $V_R$ . La solution discrète obtenue par la méthode des éléments finis de Lagrange, converge dans  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  vers la solution  $\mathbf{E}_R$  de la formulation posée sur  $V_R$ , tandis que la solution physique qui représente le champ électrique appartient à  $\mathcal{H}_0(\text{curl}; \Omega) \cap \mathcal{H}(\text{div}; \Omega)$ . Un raffinement du maillage améliore la convergence vers la solution parasite  $\mathbf{E}_R$  sans jamais approcher la solution physique, le problème venant du fait que l'espace des champs réguliers n'est pas dense dans l'espace  $\mathcal{H}_0(\text{curl}; \Omega) \cap \mathcal{H}(\text{div}; \Omega)$  de la formulation (2.1). L'étude approfondie de la coexistence de deux formulations variationnelles régularisées a fait l'objet de ma thèse. Afin de remédier au problème de la non-densité, l'idée de la méthode du champ singulier [22, 63] ou du complément singulier [14, 15, 16] consiste à rajouter explicitement une base du supplémentaire de  $V_R$  à l'espace de discrétisation ce qui est possible de façon exacte en 2D car le supplémentaire est alors de dimension finie.

Nous regroupons dans ce chapitre les résultats obtenus dans le cadre des matériaux composites pour trois catégories de méthodes. Dans la section 2.3, nous discutons l'utilisation de la méthode des éléments finis de Lagrange et son éventuelle augmentation par des champs singuliers dans le cas de la condition d'impédance. La section 2.4 présente une alternative à la méthode des champs singuliers avec la méthode de régularisation à poids. Cette méthode a été introduite par Costabel et Dauge pour des matériaux homogènes avec condition de conducteur parfait [44]. Nous avons généralisé ces travaux aux matériaux composites avec prise en compte d'une condition d'impédance. Finalement, nous présentons dans la section 2.5 des travaux relatifs à une méthode de Galerkin discontinue pour laquelle nous montrons qu'un raffinement adéquat du maillage permet de récupérer un ordre de convergence optimal malgré la présence de singularités internes et externes.

## 2.2 Le problème modèle

### 2.2.1 La géométrie des matériaux composites

Dans cette section, nous fixons la géométrie et les notations qui décrivent les matériaux composites auxquelles nous nous intéresserons dans la suite.

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$  avec  $d = 2$  ou  $3$ . Nous supposons que  $\Omega$  est un polygone ( $d = 2$ ) ou un polyèdre lipschitzien ( $d = 3$ ) ce qui implique que son bord  $\partial\Omega$  est composé de segments ( $d = 2$ ) ou de faces planes ( $d = 3$ ). Par ailleurs, nous ne considérons ici que des domaines connexes et simplement connexes dont le bord est connexe.

Dans le cas de matériaux composites, les coefficients électromagnétiques sont des fonctions constantes par morceaux. Ils définissent alors une partition  $\mathcal{P}$  de  $\Omega$  en sous-domaines  $\Omega_1, \dots, \Omega_J$  de sorte que

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon_j > 0, \text{ et } \mu(\mathbf{x}) = \mu_j > 0 \text{ sur } \Omega_j \text{ pour tout } j = 1, \dots, J.$$

Notons que nous nous limitons ici au cas de matériaux diélectriques pour lesquelles la conductivité  $\sigma$  s'annule identiquement sur tout le domaine.

Nous supposons que chaque sous-domaine  $\Omega_j$  est lui-même un polygone ( $d = 2$ ) ou polyèdre lipschitzien ( $d = 3$ ), et nous désignons par  $F_{jk}$  les arêtes ou faces de  $\partial\Omega_j \cap \partial\Omega_k$ . Nous introduisons les ensembles  $\mathcal{F}_{\text{int}}$  et  $\mathcal{F}_{\text{ext}}$  des faces intérieures (contenues dans  $\Omega$ ) et extérieures (contenues dans  $\partial\Omega$ ).

Afin de pouvoir traiter simultanément la condition du conducteur parfait et la condition d'impédance, considérons une partition du bord  $\partial\Omega$  en deux ensembles  $\{\Gamma_D, \Gamma_I\}$  de sorte que

$$\begin{aligned} \overline{\Gamma_D \cup \Gamma_I} &= \partial\Omega, \\ \overset{\circ}{\Gamma}_D \cap \overset{\circ}{\Gamma}_I &= \emptyset, \\ \Gamma_D &\text{ est connexe.} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Ceci induit une partition de  $\mathcal{F}_{\text{ext}}$  en  $\mathcal{F}_D = \{F \in \mathcal{F}_{\text{ext}} \mid F \subset \Gamma_D\}$  et  $\mathcal{F}_I = \{F \in \mathcal{F}_{\text{ext}} \mid F \subset \Gamma_I\}$ . Notons que l'un ou l'autre ensemble de la partition peut être vide.

### Espaces fonctionnels relatifs à la partition en sous-domaines

Pour une fonction  $u \in L^2(\Omega)$ , notons  $u_j = u|_{\Omega_j}$  sa restriction au sous-domaine  $\Omega_j$ . La formulation des résultats de ce chapitre fera intervenir des espaces de fonctions *régulières par morceaux* qui sont définis par rapport à la partition  $\mathcal{P}$  de  $\Omega$  en sous-domaines :

$$\text{PH}^s(\Omega; \mathcal{P}) = \{u \in L^2(\Omega) \mid u_j \in H^s(\Omega_j) \forall j = 1, \dots, J_S\}. \quad (2.3)$$

De la même façon, on notera par  $\mathbf{PH}^s(\Omega; \mathcal{P})$  les champs de régularité  $H^s$  par morceaux.

#### 2.2.2 Formulation variationnelle classique

Rappelons que le champ  $\mathbf{J}_s$  est à divergence nulle dans  $\Omega$  :

$$\text{div } \mathbf{J}_s = 0 \text{ dans } \Omega. \quad (2.4)$$

Nous cherchons le champ électrique  $\mathbf{E}$ , solution du problème

$$\text{curl } \mu^{-1} \text{curl } \mathbf{E} - \omega^2 \varepsilon \mathbf{E} = i\omega \mathbf{J}_s \text{ dans } \Omega, \quad (2.5a)$$

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_D, \quad (2.5b)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{n}) + \lambda \mu^{-1} \text{curl } \mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_I. \quad (2.5c)$$

En prenant la divergence de l'équation (2.5a), nous remarquons que toute solution de (2.5) vérifie  $\text{div}(\varepsilon \mathbf{E}) = 0$  dans  $\Omega$ .

La formulation variationnelle du problème (2.5) est alors donnée sur l'espace fonctionnel

$$V_0 = \{\mathbf{u} \in \mathcal{H}(\text{curl}; \Omega) \mid \text{div}(\varepsilon \mathbf{u}) = 0 \text{ dans } \Omega; \mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_D; \mathbf{u} \times \mathbf{n} \in L^2(\Gamma_I)\} \quad (2.6)$$

par

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{E} \in V_0 \text{ tel que} \\ a_0(\mathbf{E}, \mathbf{F}) - \omega^2(\varepsilon \mathbf{E}, \mathbf{F}) = i\omega(\mathbf{J}_s, \mathbf{F}) \forall \mathbf{F} \in V_0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Ici,  $a_0(\cdot, \cdot)$  est la forme sesquilinéaire

$$a_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mu^{-1} \operatorname{curl} \mathbf{u} \cdot \overline{\operatorname{curl} \mathbf{v}} \, dx - \int_{\Gamma_I} \lambda^{-1} (\mathbf{u} \times \mathbf{n}) \cdot \overline{(\mathbf{v} \times \mathbf{n})} \, ds. \quad (2.8)$$

L'injection de  $V_0$  dans  $L^2(\Omega)$  étant compacte (cf. [104]), le problème (2.7) rentre dans le cadre de l'alternative de Fredholm. Il admet donc une solution unique dans  $V_0$  pourvu que  $\omega^2$  n'appartienne pas au spectre discret  $\sigma(\operatorname{curl}, \operatorname{div} \varepsilon^0)$  de l'opérateur associé. Il est à noter que le spectre est réduit à l'ensemble vide si la partie  $\Gamma_I$  est de mesure non nulle car on démontre alors que le problème (2.7) admet une solution unique. En effet, supposons que deux solutions  $\mathbf{E}_1$  et  $\mathbf{E}_2$  de (2.7) existent. Leur différence  $\mathbf{e} = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2$  est alors solution du problème homogène et il vient que

$$a_0(\mathbf{e}, \mathbf{e}) - \omega^2(\varepsilon \mathbf{e}, \mathbf{e}) = 0.$$

En prenant la partie imaginaire de l'expression ci-dessus, on trouve

$$\int_{\Gamma_I} \frac{\Im \lambda}{|\lambda^2|} |\mathbf{e} \times \mathbf{n}| \, d\sigma = 0$$

et donc  $\mathbf{e} \times \mathbf{n} = 0$  sur  $\Gamma_I$ . Ceci permet d'étendre  $\mathbf{e}$  par 0 à l'extérieur de  $\Omega$  au voisinage d'un point de  $\Gamma_I$ . On conclut par le principe de prolongement analytique que  $\mathbf{e} \equiv 0$  (cf. [83]).

### 2.2.3 Singularités du problème scalaire de transmission

Nous rappelons ici les singularités de l'opérateur scalaire de transmission  $\Delta_\varepsilon$  de domaine

$$\mathcal{D}(\Delta_\varepsilon^{\operatorname{Dir}}[L^2(\Omega)]) = \{u \in H_0^1(\Omega) \mid \operatorname{div}(\varepsilon \nabla u) \in L^2(\Omega)\} \quad (2.9)$$

défini par

$$(-\Delta_\varepsilon^{\operatorname{Dir}}[L^2(\Omega)]u, v) = \int_{\Omega} \varepsilon \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.10)$$

On réfère à [86, 88] pour une description détaillée de l'opérateur de transmission.

#### Singularités en 2D

Nous introduisons l'ensemble  $\mathcal{S}$  des sommets appartenant à au moins un sous-domaine  $\Omega_j$ . Nous distinguons entre les sommets extérieurs,

$$\mathcal{S}_{\operatorname{ext}} = \{S \in \mathcal{S} \mid S \in \partial\Omega\},$$

et intérieurs,

$$\mathcal{S}_{\operatorname{int}} = \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_{\operatorname{ext}}.$$

Soit  $S \in \mathcal{S}_{\operatorname{ext}}$  un sommet extérieur appartenant aux sous-domaines  $\Omega_1, \dots, \Omega_{J_S}$ . Pour  $j \in \{1, \dots, J_S\}$ , notons  $\omega_j$  l'angle de  $\Omega_j$  en  $S$  et posons  $\sigma_0 = 0$  et  $\sigma_j = \sigma_{j-1} + \omega_j$ .

Alors,  $\lambda \in \mathbb{R}$  appartient à l'ensemble des exposants singuliers  $\Lambda_{\varepsilon, S}$  si le problème

$$\Phi''_{\lambda, j} + \lambda^2 \Phi_{\lambda, j} = 0 \text{ dans } ]\sigma_{j-1}, \sigma_j[, \quad j = 1, \dots, J_S, \quad (2.11a)$$

$$\Phi_{\lambda, j}(0) = \Phi_{\lambda, j}(\sigma_{J_S}) = 0, \quad (2.11b)$$

$$[\Phi_\lambda]_{\sigma_{j-1}} = [\varepsilon \Phi'_\lambda]_{\sigma_{j-1}} = 0, \quad j = 1, \dots, J_S - 1. \quad (2.11c)$$

admet une solution non nulle  $\Phi_\lambda \in H_0^1(]0, \sigma_{J_S}[)$ ,  $\Phi_\lambda = (\Phi_{\lambda, j})_{j=1}^{J_S}$ . Ici,  $[\varphi]_{\sigma_{j-1}}$  désigne le saut de la quantité  $\varphi$  à travers  $\sigma_{j-1}$ , et si  $(r_S, \theta_S)$  sont les coordonnées polaires locales relatif à  $S$ , les demi-axes  $\theta_S = \sigma_j$  contiennent l'arête de  $\Omega_j$  ayant  $S$  pour extrémité (cf. Figure 2.1).

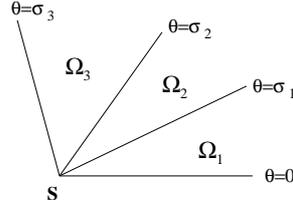


FIGURE 2.1 – Sous-domaines ayant \$S\$ pour sommet.

Lorsque \$S \in \mathcal{S}\_{\text{int}}\$ est un sommet intérieur de \$\Omega\$, nous remplaçons les conditions de Dirichlet (2.11b) par les conditions de transmission

$$\Phi_{\lambda,1}(0) = \Phi_{\lambda,J_S}(2\pi) \text{ et } \varepsilon_1 \Phi'_{\lambda,1}(0) = \varepsilon_{J_S} \Phi'_{\lambda,J_S}(2\pi). \quad (2.12)$$

Notons que \$\lambda\$ est répété dans \$\Lambda\_{\varepsilon,S}^{\text{Dir}}\$ selon sa multiplicité. On peut montrer [88] que pour \$S \in \mathcal{S}\_{\text{ext}}\$, \$\lambda\$ est nécessairement de multiplicité 1.

A chaque exposant singulier \$\lambda \in \Lambda\_{\varepsilon,S}^{\text{Dir}}\$, est maintenant associée une fonction singulière

$$S_{\lambda,S}(r_S, \theta_S) = \eta_S(r_S) r_S^\lambda \Phi_\lambda(\theta_S) \quad (2.13)$$

où \$\eta\_S\$ est une fonction de troncature régulière telle que \$\eta\_S \equiv 1\$ au voisinage de \$S\$ et \$\eta\_S \equiv 0\$ au voisinage des autres sommets. On remarquera que \$S\_{\lambda,S} \in H^1(\Omega)\$ pour \$\lambda > 0\$ tandis que \$S\_{\lambda,S} \notin \text{PH}^{\lambda+1}(\Omega; \mathcal{P})\$ ce qui implique en particulier que \$S\_{\lambda,S} \notin \text{PH}^2(\Omega; \mathcal{P})\$ pour tout \$\lambda < 1\$.

### Singularités en 3D

Dans une configuration 3D, les singularités géométriques sont les arêtes \$\mathcal{E}\$ et les sommets \$\mathcal{S}\$ des sous-domaines \$\Omega\_j\$. On désigne par \$\mathcal{S}\_{\text{ext}}\$ (resp. \$\mathcal{E}\_{\text{ext}}\$) les sommets (resp. les arêtes) situés sur le bord \$\partial\Omega\$, et par \$\mathcal{S}\_{\text{int}}\$ (resp. \$\mathcal{E}\_{\text{int}}\$) ceux situés à l'intérieur du domaine \$\Omega\$.

Au voisinage d'un sommet \$S \in \mathcal{S}\$, les coordonnées locales sont naturellement les coordonnées sphériques \$(r\_S, \sigma\_S)\$ centrées en \$S\$. Soient \$\Gamma\_S\$ le cône polyédral qui coïncide avec \$\Omega\$ au voisinage de \$S\$, et \$G\_S\$ l'intersection de \$\Gamma\_S\$ avec la sphère unité. A toute arête \$e \in \mathcal{E}\$ ayant pour extrémité le sommet \$S\$ correspond alors un sommet de \$G\_S\$, noté \$S\_e\$.

L'ensemble \$\Lambda\_{\varepsilon,S}^{\text{Dir}}\$ des exposants singuliers est lié aux valeurs propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami \$L\_{\varepsilon,S}\$ définie sur \$V\_S = H\_0^1(G\_S)\$ (resp. \$V\_S = H^1(G\_S)\$ si \$S \in \mathcal{S}\_{\text{int}}\$) par la forme quadratique

$$a_S(u, v) = \int_{G_S} \varepsilon \nabla_T u \cdot \nabla_T v \, d\sigma.$$

\$L\_{\varepsilon,S}\$ étant un opérateur auto-adjoint positif d'inverse compacte, son spectre est constitué d'une suite croissante de nombres non négatifs \$0 \leq \nu\_1 \leq \nu\_2 \leq \dots\$. Soient \$(\Phi\_j)\_{j \in \mathbb{N}} \in V\_S\$ les fonctions propres associées. Nous posons alors

$$\Lambda_{\varepsilon,S}^{\text{Dir}} = \left\{ -\frac{1}{2} + \sqrt{\nu_j + \frac{1}{4}} \mid j \in \mathbb{N}, \nu_j > 0 \right\}.$$

Pour \$\lambda \in \Lambda\_{\varepsilon,S}^{\text{Dir}}\$, notons \$\Phi\_\lambda\$ la fonction propre \$\Phi\_j\$ pour laquelle \$\lambda = -\frac{1}{2} + \sqrt{\nu\_j + \frac{1}{4}}\$. Les fonctions singulières relatives au sommet \$S\$ sont alors données par

$$S_{\lambda,S} = \eta_S(r_S) r_S^\lambda \Phi_\lambda(\sigma_S), \text{ pour } \lambda \in \Lambda_{\varepsilon,S}^{\text{Dir}} \quad (2.14)$$

avec une fonction de troncature \$\eta\_S \equiv 1\$ au voisinage de \$S\$.

Soit maintenant  $e \in \mathcal{E}$  une arête (intérieure ou extérieure) de  $\Omega$  d'angle diédral  $\omega_e$  ( $\omega_e = 2\pi$  pour  $e \in \mathcal{E}_{\text{int}}$ ). Au voisinage de  $e$ , nous choisisons comme coordonnées locales les coordonnées cylindriques  $(r_e, \theta_e, z_e)$  où  $\overrightarrow{Oz_e}$  désigne l'axe qui supporte l'arête  $e$ . Fixons alors  $R_e > 0$  and  $h_e > 0$  de sorte que le dièdre

$$D_e = \Omega_e \times \mathbb{R},$$

coïncide avec  $\Omega$  pour  $z_e \in ]-h_e, h_e[$  et ne contienne aucune autre singularité géométrique (arête ou sommet). Le domaine bidimensionnel  $\Omega_e$  du dièdre est le secteur de rayon  $R_e$  et d'angle  $\omega_e$  :

$$\Omega_e = \{(r_e \cos \theta_e, r_e \sin \theta_e) \mid 0 < r_e < R_e, 0 < \theta_e < \omega_e\}.$$

Notons  $F_{e,0} = \Gamma_{e,0} \times \mathbb{R}$  (resp.  $F_{e,\omega} = \Gamma_{e,\omega} \times \mathbb{R}$ ) les faces de  $D_e$  contenant l'arête  $e$  avec  $\Gamma_{e,0}$  et  $\Gamma_{e,\omega}$  les segments de  $\partial\Omega_e$  formant l'angle  $\omega_e$ .

Au voisinage de  $e$ , les coefficients  $\varepsilon$  et  $\mu$  ne dépendent que de la variable angulaire  $\theta_e$ . La partition  $\mathcal{P}$  de  $\Omega$  induit alors naturellement une partition  $\mathcal{P}_e$  de  $\Omega_e$  en sous-domaines  $\Omega_{e,j}$  sur lesquels  $\varepsilon$  et  $\mu$  sont constants : on pose

$$\begin{aligned} \varepsilon_{e,j} &= \varepsilon_j \text{ et} \\ \mu_{e,j} &= \mu_j \end{aligned}$$

sur  $\Omega_{e,j}$ . A l'arête  $e$  de  $\Omega$  correspond un sommet  $S$  de la section  $\Omega_e$ . Les coefficients singuliers relatifs à l'arête  $e$  sont alors induits par ceux du sommet  $S$  :

$$\Lambda_{\varepsilon,e}^{\text{Dir}} = \Lambda_{\varepsilon,S}^{\text{Dir}}$$

où  $\Lambda_{\varepsilon,S}^{\text{Dir}}$  est l'ensemble des valeurs propres du problème (2.11) défini ci-dessus.

#### 2.2.4 Singularités duales

L'espace des singularités duales a été introduit par Grisvard dans [59, 60] pour le Laplacien en milieu homogène. La définition a été adaptée au cas des milieux composites dans [86]. L'espace  $\mathcal{N}_{\varepsilon,\text{Dir}}$  est alors défini comme l'orthogonal de l'image fermée dans  $L^2(\Omega)$  de l'espace  $\text{PH}^2(\Omega; \mathcal{P}) \cap H_0^1(\Omega)$  par l'opérateur  $\Delta_\varepsilon^{\text{Dir}}$  : une fonction  $g \in L^2(\Omega)$  appartient à  $\mathcal{N}_{\varepsilon,\text{Dir}}$  si et seulement si

$$(g, \Delta_\varepsilon u) = 0 \quad \forall u \in \text{PH}^2(\Omega; \mathcal{P}) \cap \mathcal{D}(\Delta_\varepsilon^{\text{Dir}}[L^2(\Omega)]). \quad (2.15)$$

Pour la caractérisation des singularités au voisinage des arêtes dans un domaine tridimensionnel, il est utile d'introduire l'espace des singularités duales relatif à un paramètre  $\xi \in \mathbb{R}$ . Une fonction  $g \in L^2(\Omega)$  appartient à  $\mathcal{N}_{\varepsilon,\text{Dir},\xi}$  si et seulement si

$$(g, (\Delta_\varepsilon - \varepsilon\xi^2\mathbb{I})u) = 0 \quad \forall u \in \text{PH}^2(\Omega; \mathcal{P}) \cap \mathcal{D}(\Delta_\varepsilon^{\text{Dir}}[L^2(\Omega)]). \quad (2.16)$$

On montre (cf. [86], Lemme 2.14) que tout élément  $g \in \mathcal{N}_{\varepsilon,\text{Dir},\xi}$  est solution du problème homogène suivant

$$\Delta g - \xi^2 g = 0 \text{ dans } \Omega_j, \quad \forall j, \quad (2.17a)$$

$$g = 0 \text{ dans } \tilde{H}^{-1/2}(F) \quad \forall F \in \mathcal{F}_{\text{ext}}, \quad (2.17b)$$

$$[g] = 0 \text{ dans } \tilde{H}^{-1/2}(F) \quad \forall F \in \mathcal{F}_{\text{int}}, \quad (2.17c)$$

$$[\varepsilon \partial_n g] = 0 \text{ dans } \tilde{H}^{-3/2}(F) \quad \forall F \in \mathcal{F}_{\text{int}}. \quad (2.17d)$$

## 2.3 Dans l'esprit de la méthode du champ singulier

Nous nous intéressons dans cette section à la question si oui ou non, le problème modèle (2.5) peut être discrétisé par éléments finis de Lagrange, qualifiés aussi d'éléments finis *nodaux* par rapport aux éléments finis *d'arête*. La première étape dans une telle entreprise consiste à reformuler le problème sous forme d'un problème régularisé. Nous précisons le cadre fonctionnel du problème régularisé dans le paragraphe 2.3.1. La méthode des éléments finis nodaux en tant que méthode de Galerkin ne peut converger que si la suite des espaces de discrétisation converge dans un certain sens vers l'espace fonctionnel  $W$  de la formulation variationnelle. Cette convergence repose sur la densité des champs réguliers dans l'espace  $W$ . Nous adressons ces questions de densité dans le paragraphe 2.3.2 et discutons les conséquences des résultats sur le plan numérique dans §2.3.3.

### 2.3.1 Le problème régularisé

La formulation variationnelle du problème régularisé est donnée sur l'espace

$$W = \{ \mathbf{u} \in \mathcal{H}(\text{curl}; \Omega) \mid \text{div}(\varepsilon \mathbf{u}) \in L^2(\Omega); \mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_D; \mathbf{u} \times \mathbf{n} \in \mathbf{L}^2(\Gamma_I) \} \quad (2.18)$$

par

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{E} \in W \text{ tel que} \\ a(\mathbf{E}, \mathbf{F}) - \omega^2(\varepsilon \mathbf{E}, \mathbf{F}) = i\omega(\mathbf{J}_s, \mathbf{F}) \quad \forall \mathbf{F} \in W. \end{cases} \quad (2.19)$$

Ici, la forme sesquilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  est définie sur  $W \times W$  par

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mu^{-1} \text{curl } \mathbf{u} \cdot \overline{\text{curl } \mathbf{v}} d\mathbf{x} + s \int_{\Omega} \text{div}(\varepsilon \mathbf{u}) \overline{\text{div}(\varepsilon \mathbf{v})} d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_I} \lambda^{-1}(\mathbf{u} \times \mathbf{n}) \cdot \overline{(\mathbf{v} \times \mathbf{n})} ds$$

pour un paramètre  $s > 0$  donné.

En ce qui concerne l'équivalence entre les problèmes (2.7) et (2.19), supposons dans un premier temps que  $\omega^2$  n'appartient pas au spectre  $\text{sp}(\text{curl}, \text{div } \varepsilon^0)$  de sorte que le problème classique (2.7) admette une solution unique  $\mathbf{E} \in V_0$ .  $\mathbf{E}$  appartient à l'espace fonctionnel du problème régularisé,  $W$ , et il vient que

$$a(\mathbf{E}, \mathbf{F}) = a_0(\mathbf{E}, \mathbf{F})$$

pour tout champ  $\mathbf{F} \in W$  puisque  $\text{div}(\varepsilon \mathbf{E}) = 0$  dans  $\Omega$  ce qui annule le terme supplémentaire  $s \int_{\Omega} \text{div}(\varepsilon \mathbf{u}) \overline{\text{div}(\varepsilon \mathbf{v})} d\mathbf{x}$ . Grâce à une décomposition de Helmholtz de  $\mathbf{F}$ , on montre ensuite que  $\mathbf{E}$  est également solution du problème régularisé (2.19). On montre de la même façon que tout élément propre  $(\omega^2, \mathbf{E}) \in \text{sp}(\text{curl}, \text{div } \varepsilon^0) \times V_0$  est un élément propre du problème régularisé. Ainsi,

$$\text{sp}(\text{curl}, \text{div } \varepsilon^0) \subset \text{sp}(\text{curl}, \text{div } \varepsilon).$$

Réciproquement, soit  $\omega^2 \in \text{sp}(\text{curl}, \text{div } \varepsilon)$  et soit  $\mathbf{E} \in W$  une fonction propre associée à  $\omega^2$ ,

$$a(\mathbf{E}, \mathbf{F}) = \omega^2(\varepsilon \mathbf{E}, \mathbf{F}) \quad \forall \mathbf{F} \in W.$$

En prenant  $\mathbf{F} = \nabla \varphi$  avec  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$  tel que  $\Delta_\varepsilon \varphi \in L^2(\Omega)$ , on voit que

$$(\text{div}(\varepsilon \mathbf{E}), s\Delta_\varepsilon \varphi + \omega^2 \varphi) = 0.$$

Si  $\omega^2$  n'appartient pas au spectre de l'opérateur  $-s\Delta_\varepsilon$  avec condition de Dirichlet sur  $\Gamma$ , alors la solution  $\mathbf{E}$  du problème régularisé vérifie  $\text{div}(\varepsilon \mathbf{E}) = 0$ . Par conséquent, le couple  $(\omega^2, \mathbf{E})$  est un élément propre du problème classique ce qui montre

$$\text{sp}(\text{curl}, \text{div } \varepsilon) \setminus \text{sp}(-s\Delta_\varepsilon) \subset \text{sp}(\text{curl}, \text{div } \varepsilon^0).$$

En conclusion, les ensembles  $\text{sp}(\text{curl}, \text{div } \varepsilon^0)$  et  $\text{sp}(\text{curl}, \text{div } \varepsilon)$  coïncident en dehors du spectre de l'opérateur  $-s\Delta_\varepsilon$ . On peut noter que pour une pulsation  $\omega$  donnée, on peut ajuster le paramètre  $s$  devant le terme régularisant  $(\text{div}(\varepsilon \cdot), \text{div}(\varepsilon \cdot))$  pour que  $\omega^2$  soit plus petit que la plus petite valeur propre de l'opérateur  $-s\Delta_\varepsilon$ .

### 2.3.2 Résultats de densité

Les questions qui nous intéressent dans cette section sont les suivantes : le sous-espace de  $W$  formé par les champs réguliers par morceaux,  $W_R = \mathbf{PH}^1(\Omega; \mathcal{P}) \cap W$ , est-il dense dans  $W$  ou pas ? S'il n'est pas dense, quels sont les champs dans le supplémentaire de son adhérence ?

Pour  $\Gamma_I = \emptyset$ , nous savons [45] que  $W_R$  est un sous-espace fermé de  $W$  et qu'il existe des champs singuliers  $\mathbf{s}_\lambda \in W$ , générés par les gradients des fonctions singulières, qui n'appartiennent pas à  $W_R$ . La situation peut être différente au voisinage des sommets et arêtes de  $\Gamma_I$ . En effet, il a été démontré dans [38, 76, 42] que  $W_R$  était dense dans  $W$  dans le cas d'un matériau *homogène* de permittivité  $\varepsilon$  constante sur  $\Omega$ . Ici, nous nous intéressons au comportement asymptotique du champ électrique au voisinage des sommets et arêtes de  $\Gamma_I$  pour un matériau *composite*. Notons également que l'article [77] dont nous résumons les résultats, se limite au cas d'une condition d'impédance sur toute la frontière  $\Gamma$ , autrement dit  $\Gamma_D = \emptyset$ . Pour ce mémoire, nous avons adapté les résultats au cas d'une condition aux limites mixte pour laquelle  $\text{meas}(\Gamma_D) > 0$  et  $\text{meas}(\Gamma_I) > 0$ . Dans la suite, nous distinguons entre les sommets et arêtes du bord de Dirichlet

$$\mathcal{S}_D = \left\{ S \in \mathcal{S}_{\text{ext}} \mid S \in \overset{\circ}{\Gamma}_D \right\}, \quad \mathcal{E}_D = \left\{ e \in \mathcal{E}_{\text{ext}} \mid e \in \overset{\circ}{\Gamma}_D \right\}, \quad (2.20)$$

et ceux du bord d'impédance

$$\mathcal{S}_I = \mathcal{S}_{\text{ext}} \setminus \mathcal{S}_D, \quad \mathcal{E}_I = \mathcal{E}_{\text{ext}} \setminus \mathcal{E}_D. \quad (2.21)$$

Il est à noter que les sommets et arêtes dits "de Dirichlet" sont situés à l'intérieur du bord de Dirichlet.

La démarche qui permet de répondre aux questions ci-dessus se résume comme suit :

1. Identifier l'espace des potentiels scalaires  $H$  et son sous-espace des potentiels réguliers par morceaux,  $H_R$ .
2. Montrer que la densité de  $W_R$  dans  $W$  équivaut à la densité de  $H_R$  dans  $H$ .
3. Caractériser les éléments dans un éventuel supplémentaire  $\mathcal{O}_\varepsilon$  de  $\overline{H_R}$  dans  $H$ .
4. Montrer qu'à chaque élément de  $\mathcal{O}_\varepsilon$  correspond une singularité duale de trace normale régulière.
5. Conclure.

#### Potentiels scalaires

Selon la notion de potentiels scalaires de la section 1.4, nous devons identifier les champs de l'espace  $W$  à rotationnel nul. Soit alors  $\mathbf{F} \in W$  tel que  $\text{curl } \mathbf{F} = 0$  dans  $\Omega$ . Puisque  $\Omega$  est simplement connexe, il existe une fonction  $\varphi \in H^1(\Omega)$  telle que  $\mathbf{F} = \nabla \varphi$ . Comme  $\Gamma_D$  est connexe, on peut choisir  $\varphi$  tel que  $\varphi = 0$  sur  $\Gamma_D$ . On a  $\Delta_\varepsilon \varphi = \text{div}(\varepsilon \mathbf{F}) \in L^2(\Omega)$  et  $\gamma_t(\nabla \varphi) \in \mathbf{L}^2(\Gamma_I)$  ce qui implique que le gradient surfacique de  $\varphi$  appartient à  $\mathbf{L}^2(\Gamma_I)$ . Par conséquent,  $\varphi|_{\Gamma_I} \in H^1(\Gamma_I)$  puisque  $\varphi$  admet une trace dans  $H^{1/2}(\partial\Omega)$  en tant que élément de  $H^1(\Omega)$ . Finalement, on déduit du fait que  $\varphi$  s'annule sur  $\Gamma_D$  que  $\varphi|_{\Gamma_I} \in H_0^1(\Gamma_I)$  car  $\partial\Gamma_I = \partial\Gamma_D$ .

Nous définissons alors l'espace des potentiels scalaires  $H$  comme suit :

$$H = \left\{ \varphi \in H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega) \mid \Delta_\varepsilon \varphi \in L^2(\Omega), \varphi|_{\Gamma_I} \in H_0^1(\Gamma_I) \right\}. \quad (2.22)$$

Notons que le potentiel scalaire est défini de façon unique dans  $H$  puisque  $\Gamma_D$  est supposé de mesure non nulle. Dans [77], nous avons traité le cas  $\Gamma_I = \partial\Omega$ . L'unicité du potentiel scalaire est garantie par l'introduction d'une forme linéaire  $\ell$  définie sur  $H^1(\Gamma_I)$  telle que  $\ell(1) \neq 0$ . L'espace des potentiels scalaires s'écrit alors

$$H = \left\{ \varphi \in H^1(\Omega) \mid \Delta_\varepsilon \varphi \in L^2(\Omega), \varphi|_{\Gamma_I} \in H^1(\Gamma_I), \ell(\varphi) = 0 \right\}. \quad (2.23)$$

Sur  $H$ , on montre que l'application

$$\varphi \in H \mapsto |\varphi|_H = \left( \|\Delta_\varepsilon \varphi\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{F \in \mathcal{F}_I} \|\nabla_T \varphi\|_{0,F}^2 \right)^{1/2} \quad (2.24)$$

définit une norme équivalente à la norme canonique.

### Réduction à un problème scalaire

Le résultat principal de cette section est une décomposition des champs de l'espace  $W$  en une partie régulière et une partie singulière dérivant d'un potentiel scalaire  $\varphi \in H$ . Plus précisément, cette décomposition s'énonce de la façon suivante :

#### Théorème 2.1. [Théorème de décomposition dans $W$ ]

Soit  $\mathbf{E} \in W$ . Alors il existe  $\mathbf{G} \in \mathbf{PH}^1(\Omega; \mathcal{P}) \cap W$  et  $\varphi \in H$  tels que

$$\mathbf{E} = \mathbf{G} + \nabla \varphi \text{ dans } \Omega. \quad (2.25)$$

Par ailleurs,  $\mathbf{G}$  et  $\varphi$  vérifient l'estimation

$$\|\mathbf{G}\|_{\mathbf{PH}^1(\Omega; \mathcal{P})} + \|\varphi\|_H \lesssim \|\mathbf{E}\|_W. \quad (2.26)$$

□

Le Théorème 2.1 permet de définir une application  $\Phi$  qui à un champ  $\mathbf{E} \in W$  associe un potentiel scalaire  $\varphi = \Phi(\mathbf{E})$  de sorte que

$$\mathbf{E} - \nabla(\Phi(\mathbf{E})) \in \mathbf{PH}^1(\Omega; \mathcal{P}) \cap W, \quad (2.27)$$

$$\Phi(\nabla \varphi) = \varphi \quad \forall \varphi \in H. \quad (2.28)$$

L'application  $\Phi$  est continue et surjective d'après les assertions du Théorème 2.1. Par ailleurs, l'image d'un champ régulier  $\mathbf{E} \in \mathbf{PH}^1(\Omega; \mathcal{P}) \cap W$  appartient à l'espace des potentiels réguliers  $\mathbf{PH}^2(\Omega; \mathcal{P}) \cap H$  :

$$\Phi(\mathbf{PH}^1(\Omega; \mathcal{P}) \cap W) \subset \mathbf{PH}^2(\Omega; \mathcal{P}) \cap H.$$

Ces propriétés permettent de démontrer le

#### Théorème 2.2. [Réduction à un problème scalaire]

L'espace des champs de vecteurs  $\mathbf{PH}^1(\Omega; \mathcal{P}) \cap W$  est dense dans  $W$  si et seulement si l'espace des potentiels scalaires  $\mathbf{PH}^2(\Omega; \mathcal{P}) \cap H$  est dense dans  $H$ . □

### Un supplémentaire de $\overline{\mathbf{PH}^2(\Omega; \mathcal{P}) \cap H}$

Afin de donner une réponse à la question si oui ou non, l'espace  $H_R = \mathbf{PH}^2(\Omega; \mathcal{P}) \cap H$  est dense dans  $H$ , nous allons étudier un supplémentaire de  $\overline{H_R}$  dans  $H$ . Pour cela, considérons le sous-espace  $H_0$  de  $H$  défini par

$$H_0 = \{u \in H \mid u|_F \in H_0^1(F) \quad \forall F \in \mathcal{F}_I\}.$$

On montre facilement que toute fonction  $u \in H$  se décompose en une fonction de  $H_0$  et une somme finie de fonctions régulières dont le support est concentré au voisinage des singularités géométriques. Par conséquent, tout supplémentaire de  $\overline{\mathbf{PH}^2(\Omega; \mathcal{P}) \cap H_0}$  est un supplémentaire de

$\overline{H_R}$ . Définissons alors l'orthogonal de  $\overline{\text{PH}^2(\Omega; \mathcal{P}) \cap H_0}$  pour le produit scalaire associé à la norme  $|\cdot|_H$  de  $H$  : une fonction  $f \in H_0$  appartient à  $\mathcal{O}$  si et seulement si

$$(\Delta_\varepsilon f, \Delta_\varepsilon u) + \sum_{F \in \mathcal{F}_I} (\nabla_T f, \nabla_T u)_F = 0 \quad \forall u \in H_{0,R} \quad (2.29)$$

où  $H_{0,R} = \text{PH}^2(\Omega; \mathcal{P}) \cap H_0$ .

### Caractérisation des éléments de $\mathcal{O}$

Ce paragraphe résume les résultats des Propositions 4.3 et 5.7 de [LN02].

Soit  $f \in \mathcal{O}$  et notons  $g = \Delta_\varepsilon f \in L^2(\Omega)$ . Puisque  $\text{PH}^2(\Omega; \mathcal{P}) \cap H_0^1(\Omega) \subset H_{0,R}$ , nous obtenons immédiatement que  $g$  est une singularité duale (cf. la relation (2.15) qui définit l'espace  $\mathcal{N}_{\varepsilon, \text{Dir}}$ ). En tant qu'élément de  $\mathcal{N}_{\varepsilon, \text{Dir}}$ ,  $g$  admet une dérivée normale au sens  $\tilde{H}^{-3/2}(F)$  pour tout  $F \in \mathcal{F}_{\text{ext}}$ . Mais comme  $f|_F \in H_0^1(F)$  pour  $F \in \mathcal{F}_I$ , la relation d'orthogonalité (2.29) permet d'identifier

$$\varepsilon \partial_n g = -\Delta_T f \in H^{-1}(F) \quad \forall F \in \mathcal{F}_I. \quad (2.30)$$

Finalement, nous avons montré qu'à chaque élément de  $\mathcal{O}$  correspond une singularité duale  $g \in \mathcal{N}_{\varepsilon, \text{Dir}}$  admettant une trace de dérivée normale dans  $H^{-1}(F)$  pour  $F \in \mathcal{F}_I$  (au lieu de  $\tilde{H}^{-3/2}(F)$ ). Le développement asymptotique des singularités duales au voisinage des sommets et arêtes permettra ensuite de décider si oui ou non un tel élément peut exister sans être réduit à 0.

### Conclusion

Nous expliquons notre démarche dans le cas d'un polygone. Le cas d'un polyèdre de  $\mathbb{R}^3$  est techniquement plus difficile, mais suit les mêmes idées.

Sous la condition technique  $1 \notin \Lambda_{\varepsilon, S}^{\text{Dir}}$ , nous pouvons exhiber une base de  $\mathcal{N}_{\varepsilon, \text{Dir}}$  permettant de décrire le comportement de  $g \in \mathcal{N}_{\varepsilon, \text{Dir}}$  au voisinage d'un sommet  $S \in \mathcal{S}$  :

$$g \approx \sum_{\lambda \in \Lambda_{\varepsilon, S}^{\text{Dir}} \cap ]0, 1[} c_{\lambda, S} r_S^{-\lambda} \Phi_\lambda(\theta_S) \quad (2.31)$$

où les fonctions  $\Phi_\lambda$  ont été définies au paragraphe 2.2.3. Soit maintenant  $S$  un sommet de  $\overline{\Gamma_I}$ . Alors, d'après (2.30),  $\varepsilon \partial_n g \in H^{-1}(F)$  pour au moins une arête ayant  $S$  pour sommet. Par le développement (2.31), nous obtenons

$$\varepsilon \partial_n g \approx \sum_{\lambda \in \Lambda_{\varepsilon, S}^{\text{Dir}} \cap ]0, 1[} c_{\lambda, S} r_S^{-\lambda-1}.$$

Or,  $r_S^{-\lambda-1} \in H^{-1}(F)$  si et seulement si  $\lambda < 1/2$  ce qui implique que les coefficients  $c_{\lambda, S}$  correspondant à  $\lambda \geq 1/2$  doivent s'annuler. Si l'ensemble  $\Lambda_{\varepsilon, S}^{\text{Dir}}$  ne contient pas d'exposants singuliers entre 0 et 1/2, alors la fonction  $g$  est régulière au voisinage de  $S$ . Pour les sommets du bord  $\Gamma_D$  ainsi que les sommets intérieurs, par contre, on retiendra tous les termes du développement asymptotique (2.31). En conclusion, nous obtenons les résultats suivants (Théorèmes 4.4, 4.8 et 5.1 de [LN02]) :

**Théorème 2.3. [Résultat de densité et singularités 2D]**

Supposons que  $1 \notin \Lambda_{\varepsilon, S}^{\text{Dir}}$  pour tout  $S \in \mathcal{S}$ . Si

$$\Lambda_{\varepsilon, S}^{\text{Dir}} \cap ]0, 1/2[ = \emptyset \quad \forall S \in \mathcal{S}_I \quad \text{et} \quad \Lambda_{\varepsilon, S}^{\text{Dir}} \cap ]0, 1[ = \emptyset \quad \forall S \in \mathcal{S}_D, \quad (2.32)$$

alors  $H_R$  est dense dans  $H$  (et  $W_R$  est donc dense dans  $W$ ). Sinon, tout  $\mathbf{E} \in W$  s'écrit

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_R + \sum_{S \in \mathcal{S}_D \cup \mathcal{S}_{\text{int}}} \sum_{\lambda \in \Lambda_{\varepsilon, S}^{\text{Dir}} \cap ]0, 1[} c_{\lambda, S} \nabla S_{\lambda, S} + \sum_{S \in \mathcal{S}_I} \sum_{\lambda \in \Lambda_{\varepsilon, S}^{\text{Dir}} \cap ]0, 1/2[} c_{\lambda, S} \nabla S_{\lambda, S}$$

avec  $\mathbf{E}_R \in \overline{W}_R$ . □

**Théorème 2.4. [Résultat de densité 3D]**

Supposons que  $1/2 \notin \Lambda_{\varepsilon, S}^{\text{Dir}}$  pour tout sommet  $S \in \mathcal{S}$  et  $1 \notin \Lambda_{\varepsilon, e}^{\text{Dir}}$  pour toute arête  $e \in \mathcal{E}$ . Si

$$\Lambda_{\varepsilon, S}^{\text{Dir}} \cap ]0, 1/2[ = \emptyset \quad \forall S \in \mathcal{S}_{\text{int}} \cup \mathcal{S}_D \quad (2.33)$$

et

$$\Lambda_{\varepsilon, e}^{\text{Dir}} \cap ]0, 1/2[ = \emptyset \quad \forall e \in \mathcal{E}_I \quad \text{et} \quad \Lambda_{\varepsilon, e}^{\text{Dir}} \cap ]0, 1[ = \emptyset \quad \forall e \in \mathcal{E}_D \cup \mathcal{S}_{\text{int}} \quad (2.34)$$

alors  $H_R$  est dense dans  $H$  (et  $W_R$  est donc dense dans  $W$ ). □

Si l'une des hypothèses (2.33) ou (2.34) n'est pas vérifiée, on peut construire explicitement des éléments de  $W$  qui n'appartiennent pas à  $\overline{W}_R$  et ne peuvent donc pas être approchés par des champs réguliers. A titre d'exemple, nous déterminons un champ singulier associé à une arête  $e \in \mathcal{E}_I$  pour laquelle  $\Lambda_{\varepsilon, e}^{\text{Dir}} \cap ]0, 1/2[$  n'est pas vide. Soit alors  $\lambda \in \Lambda_{\varepsilon, e}^{\text{Dir}} \cap ]0, 1/2[$  et soit  $\chi = \chi(z)$  une fonction régulière définie sur l'arête  $e$  qui s'annule aux extrémités de  $e$ . Soit finalement  $S$  le sommet de la section  $\Omega_e$  correspondant à l'arête  $e$ . Alors le champ

$$\mathbf{E}_{e, \lambda} = \nabla (\chi(z) \eta_S(r_S) S_{\lambda, S}(r_S, \theta_S))$$

n'appartient pas à  $\overline{W}_R$ .

On peut noter que les théorèmes 2.3 et 2.4 recouvrent les résultats de [38, 77] établis pour un matériau homogène et une condition d'impédance sur tout le bord : lorsque  $\Gamma_D = \emptyset$  et  $\varepsilon \equiv \text{const.}$ , les conditions (2.32), (2.33) et (2.34) sont toujours satisfaites ce qui implique que  $W_R$  est dense dans  $W$ . D'un autre côté, on peut définir explicitement des matériaux composites pour lesquelles la condition  $\Lambda_{\varepsilon, S}^{\text{Dir}} \cap ]0, 1/2[ = \emptyset$  est violée de sorte que  $W_R$  ne soit pas dense dans  $W$  (cf. [45]).

**2.3.3 Conséquences sur le plan numérique et conclusion**

Les résultats de densité des théorèmes 2.3 et 2.4 jouent un rôle important dans le choix d'une méthode de discrétisation. De par son caractère elliptique, le problème régularisé (2.19) se prête à une discrétisation par éléments finis nodaux. En effet, ces éléments finis étant conformes dans  $H^1$ , l'espace de discrétisation associé est un sous-espace de  $W_R$  et la solution approchée converge dans  $H^1$  vers un champ  $\mathbf{E}_R$  de  $\overline{W}_R$ . Seulement, en absence de densité de  $W_R$  dans  $W$ ,  $\mathbf{E}_R$  ne coïncide pas, en général, avec la solution physique  $\mathbf{E}$  du problème posé dans  $W$  car celle-ci a toutes les chances d'avoir une composante dans le supplémentaire de  $\overline{W}_R$ . Ceci explique également qu'un raffinement du maillage au voisinage des singularités ne permet pas de pallier le problème : on réussira seulement à mieux approcher la solution  $\mathbf{E}_R$  qui n'a pas de sens physique !

Afin de remédier à cette difficulté, il faudra donc rétablir la densité ce qui peut être fait en rajoutant explicitement à l'espace des éléments finis nodaux des fonctions de base singulières. Pour le problème scalaire de l'équation de Poisson en deux dimensions d'espace, on retrouve

alors la *méthode des fonctions singulières* introduite en 1973 dans les travaux de Strang et Fix [101]. Dans le cadre des équations de Maxwell, la *méthode des champs singuliers* [22, 76] qui a fait l'objet de ma thèse, reprend l'idée de rajouter les singularités explicitement à l'espace de discrétisation. Elle a été implémentée pour des matériaux homogènes en deux dimensions d'espace (cf. [HL02]). Parallèlement, la *méthode du complément singulier* a été développée par l'équipe autour de F. Assous et P. Ciarlet, Jr. [16, 15] et implémentée dans le cas de matériaux homogènes. On pourrait sans problème élargir le concept de ces méthodes au cas des matériaux composites, la seule difficulté supplémentaire étant la détermination des coefficients singuliers  $\Lambda_{\varepsilon, S}^{\text{Dir}}$  qui se ferait de manière approchée. Le théorème 2.3 permettra alors de dire si oui ou non, il faudrait rajouter le champ singulier. Nous n'avons pour le moment pas entrepris la mise en œuvre d'une telle méthode dans le cadre des matériaux composites.

Notons quand même que ces méthodes sont limitées au cas des géométries 2D ou 3D ayant des symétries particulières, comme par exemple les domaines axisymétriques ou prismatiques [37]. En effet, dans ces cas-là, le supplémentaire de  $\overline{W_R}$  est engendré par des singularités qui sont essentiellement de nature 2D. Pour une géométrie 3D complète telle que le cube de Fichera par exemple, il serait nécessaire de procéder à une *approximation* du supplémentaire qui est de dimension infinie. Il n'est pas clair si une telle approximation permettra encore de recouvrir numériquement la densité pour que la méthode converge vers la solution physique.

En conclusion, notre travail a permis de clarifier le cadre de l'utilisation des éléments finis nodaux pour la discrétisation des équations de Maxwell dans des matériaux composites en 2D et 3D. Il en résulte que certaines singularités qu'on pourrait qualifier de *faible*, peuvent être approchées par éléments finis nodaux dès lors qu'elles sont associées au bord de la condition d'impédance, tandis que ce n'est pas possible si elles sont associées au bord de la condition du conducteur parfait. Sur le plan numérique, la portée de ces résultats est pourtant limitée, puisque la classe des matériaux composites réalistes permettant une approximation par éléments finis nodaux, s'avère relativement petite.

## 2.4 La méthode de régularisation à poids

La méthode de régularisation à poids a été introduite en 2002 par M. Costabel et M. Dauge [44] pour des matériaux homogènes entourés d'un conducteur parfait. Depuis, la performance de la méthode a été établie dans le traitement de problèmes mixtes issus de la MHD [61] ou en cas de raffinement *hp* [47]. L'idée principale peut être résumée comme suit : trouver un espace  $Y$  "entre"  $L^2(\Omega)$  et  $H^{-1}(\Omega)$ , autrement dit

$$L^2(\Omega) \hookrightarrow Y \hookrightarrow H^{-1}(\Omega), \quad (2.35)$$

et remplacer la contrainte  $\text{div } \mathbf{E} \in L^2(\Omega)$  par  $\text{div } \mathbf{E} \in Y$  de sorte que le nouveau problème régularisé soit posé sur un espace vectoriel  $W[Y] \subset \mathcal{H}(\text{curl}; \Omega)$  dans lequel les champs réguliers de  $W_R[Y]$  sont denses. La condition (2.35) est motivée par le fait que tout champ de  $\mathcal{H}(\text{curl}; \Omega)$  a sa divergence dans  $H^{-1}(\Omega)$ . Il a été démontré dans [44] que ceci peut être réalisé en prenant pour  $Y$  des espaces à poids,

$$L_\alpha^2(\Omega) = \{g \in H^{-1} \mid w^\alpha g \in L^2(\Omega)\} \quad (2.36)$$

où  $w = w(\mathbf{x})$  est une fonction poids équivalente à la distance de  $\mathbf{x}$  aux singularités géométriques.

Dans cette section qui résume les résultats de [CLLN10], nous montrons que l'on peut construire explicitement cette espace  $Y$  dans le cas de matériaux composites et de conditions au bord mixtes de type conducteur parfait et impédance. Nous formulons dans un premier temps le nouveau problème avec régularisation à poids pour un espace  $Y$  générique. Nous suivons ensuite la même démarche que dans le paragraphe 2.3.2, à savoir

1. Identifier l'espace des potentiels scalaires  $H[Y]$  et son sous-espace des potentiels réguliers par morceaux,  $H_R[Y]$ .
2. Montrer que la densité de  $W_R[Y]$  dans  $W[Y]$  équivaut à la densité de  $H_R[Y]$  dans  $H[Y]$ .
3. Etablir la densité de  $H_R[Y]$  dans  $H[Y]$  pour un choix particulier de l'espace  $Y$  dépendant de la dimension d'espace.

### 2.4.1 Le problème avec régularisation à poids

Soit  $Y = L^2_\alpha(\Omega)$  avec  $0 \leq \alpha < 1$ . Un tel espace à poids vérifie la condition (2.35). Nous définissons l'espace  $W[Y]$  par

$$W[Y] = \{ \mathbf{u} \in \mathcal{H}(\text{curl}; \Omega) \mid \text{div}(\varepsilon \mathbf{u}) \in Y; \mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_D; \mathbf{u} \times \mathbf{n} \in \mathbf{L}^2(\Gamma_I) \}. \quad (2.37)$$

Le problème avec régularisation à poids est alors donné sur  $W[Y]$  par la formulation variationnelle

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{E} \in W[Y] \text{ tel que} \\ a(\mathbf{E}, \mathbf{F}) - \omega^2(\varepsilon \mathbf{E}, \mathbf{F}) = i\omega(\mathbf{J}_s, \mathbf{F}) \quad \forall \mathbf{F} \in W[Y], \end{cases} \quad (2.38)$$

où la forme sesquilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  est maintenant définie sur  $W[Y] \times W[Y]$  par

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mu^{-1} \text{curl } \mathbf{u} \cdot \overline{\text{curl } \mathbf{v}} dx + s \langle \text{div}(\varepsilon \mathbf{u}), \text{div}(\varepsilon \mathbf{v}) \rangle_Y - \int_{\Gamma_I} \lambda^{-1} (\mathbf{u} \times \mathbf{n}) \cdot \overline{(\mathbf{v} \times \mathbf{n})} ds$$

pour  $s > 0$ . Ici,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_Y$  désigne le produit scalaire de l'espace  $Y$ .

Concernant l'existence et l'unicité de la solution du problème avec régularisation à poids, notons que toute solution du problème classique est une solution du problème régularisé.

Pour démontrer la réciproque, introduisons l'opérateur de transmission  $\Delta_\varepsilon^{\text{Dir}}[Y]$  de domaine

$$\mathcal{D}(\Delta_\varepsilon^{\text{Dir}}[Y]) = \{ \varphi \in H_0^1(\Omega) \mid \text{div}(\varepsilon \nabla \varphi) \in Y \}.$$

Cet opérateur est bien défini puisque  $Y$  est un sous-espace de  $H^{-1}(\Omega)$ .

Dans (2.38), prenons maintenant comme champ test un gradient :  $\mathbf{F} = \nabla \varphi$  avec  $\varphi \in \mathcal{D}(\Delta_\varepsilon^{\text{Dir}}[Y])$ . A condition que le second membre  $\mathbf{J}_s$  soit à divergence nulle, nous obtenons

$$s \langle \text{div}(\varepsilon \mathbf{E}), \text{div}(\varepsilon \nabla \varphi) \rangle_Y + \omega^2 \langle \text{div}(\varepsilon \mathbf{E}), \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega) - H_0^1(\Omega)} = 0.$$

Mais  $\text{div}(\varepsilon \mathbf{E})$  appartient à  $Y$  et la fonction  $\varphi$  définit une forme linéaire sur  $Y$ . En tant qu'élément de  $Y'$ , elle peut donc être mise en bijection avec un élément  $K\varphi \in Y$  grâce au théorème de représentation de Riesz. Ainsi, il vient que

$$\langle \text{div}(\varepsilon \mathbf{E}), s \text{div}(\varepsilon \nabla \varphi) + \omega^2 K\varphi \rangle_Y = 0$$

quel que soit  $\varphi \in \mathcal{D}(\Delta_\varepsilon^{\text{Dir}}[Y])$ . A condition que l'image de l'opérateur  $s\Delta_\varepsilon^{\text{Dir}} + \omega^2 K$  soit dense dans  $Y$ , la solution du problème avec régularisation à poids est à divergence nulle.

### 2.4.2 Résultats de densité

#### Réduction à un problème scalaire

L'espace des potentiels scalaires relatif à l'espace  $W[Y]$  est défini comme suit :

$$H[Y] = \{ \varphi \in H^1(\Omega) \mid \Delta_\varepsilon \varphi \in Y; \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_D; \varphi|_{\Gamma_I} \in H_0^1(\Gamma_I) \}. \quad (2.39)$$

$H[Y]$  est muni de la norme

$$\varphi \in H[Y] \mapsto |\varphi|_{H[Y]} = \left( \|\Delta_\varepsilon \varphi\|_Y^2 + \sum_{F \in \mathcal{F}_I} \|\nabla_T \varphi\|_{0,F}^2 \right)^{1/2} \quad (2.40)$$

qui est équivalente à la norme canonique.

Afin de ramener la question de la densité de  $W_R[Y] \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{PH}^1(\Omega; \mathcal{P}) \cap W[Y]$  dans  $W[Y]$  à l'étude des éléments de  $H[Y]$ , nous décomposons les éléments de  $W[Y]$  en une partie régulière dans  $W_R[Y]$  et une partie singulière qui dérive d'un potentiel scalaire. Pour un champ  $\mathbf{E} \in W[Y]$ , considérons l'unique fonction  $\chi \in H_0^1(\Omega)$  telle que  $\Delta_\varepsilon \chi = \text{div}(\varepsilon \mathbf{E})$ . Une telle fonction existe puisque  $\text{div}(\varepsilon \mathbf{E}) \in Y \subset H^{-1}(\Omega)$ . Le champ  $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E} - \nabla \chi$  est alors à divergence nulle et appartient à l'espace  $W = W[L^2(\Omega)]$  ce qui permet d'utiliser les résultats de la section 2.3. Ainsi, nous obtenons le

**Théorème 2.5. [Réduction à un problème scalaire]**

*L'espace des champs de vecteurs  $\mathbf{PH}^1(\Omega; \mathcal{P}) \cap W[Y]$  est dense dans  $W[Y]$  si et seulement si l'espace des potentiels scalaires  $\text{PH}^2(\Omega; \mathcal{P}) \cap H[Y]$  est dense dans  $H[Y]$ .  $\square$*

**Un supplémentaire de  $\overline{\text{PH}^2(\Omega; \mathcal{P}) \cap H[Y]}$**

Comme dans la section 2.3, nous limitons notre étude au sous-espace  $H_0[Y]$  des fonctions  $\varphi \in H[Y]$  dont la trace  $\varphi|_F$  appartient à  $H_0^1(F)$  pour toute face  $F \in \mathcal{F}_I$ . On montre que la densité de  $\text{PH}^2(\Omega; \mathcal{P}) \cap H_0[Y]$  dans  $H_0[Y]$  implique la densité de  $\text{PH}^2(\Omega; \mathcal{P}) \cap H[Y]$  dans  $H[Y]$ .

Une fonction  $f \in H_0[Y]$  appartient alors au supplémentaire  $\mathcal{O}[Y]$  si et seulement si

$$\langle \Delta_\varepsilon f, \Delta_\varepsilon u \rangle_Y + \sum_{F \in \mathcal{F}_I} (\nabla_T f, \nabla_T u) = 0, \quad \forall u \in \text{PH}^2(\Omega; \mathcal{P}) \cap H_0[Y]. \quad (2.41)$$

**Conclusion sur la densité**

Dans (2.41), posons  $g = \Delta_\varepsilon f$  et prenons  $u \in \text{PH}^2(\Omega; \mathcal{P}) \cap H_0^1(\Omega)$  telle que  $\Delta_\varepsilon u \in L^2(\Omega)$ . En rappelant que  $Y = L_\alpha^2(\Omega)$ , il vient que

$$0 = \langle g, \Delta_\varepsilon u \rangle_Y = (w^\alpha g, w^\alpha \Delta_\varepsilon u) = (g_\alpha, \Delta_\varepsilon u),$$

avec  $g_\alpha = w^{2\alpha} g \in L^2(\Omega)$ . Ceci montre que  $g_\alpha$  est une singularité duale de  $\mathcal{N}_{\varepsilon, \text{Dir}}$  (cf. (2.15) pour la définition de  $\mathcal{N}_{\varepsilon, \text{Dir}}$ ).

Nous détaillons la suite de la démarche pour une géométrie 2D, le cas 3D étant similaire, mais plus technique. Au voisinage d'un sommet  $S \in \mathcal{S}$ ,  $g_\alpha$  s'écrit en coordonnées polaires locales

$$g_\alpha \approx \sum_{\lambda \in \Lambda_{\varepsilon, S}^{\text{Dir}} \cap ]0, 1[} c_{\lambda, S} r_S^{-\lambda} \Phi_{\lambda, S}(\theta_S)$$

(cf. (2.31)). Or,  $g_\alpha = w^{2\alpha} g$  et  $w^{-\alpha} g_\alpha = w^\alpha g \in L^2(\Omega)$ . Comme  $w(\mathbf{x}) \approx r_S$  au voisinage de  $S$ , on a

$$w^{-\alpha} g_\alpha \approx \sum_{\lambda \in \Lambda_{\varepsilon, S}^{\text{Dir}} \cap ]0, 1[} c_{\lambda, S} r_S^{-\lambda - \alpha} \Phi_{\lambda, S}(\theta_S).$$

Mais  $r_S^{-\lambda - \alpha}$  appartient à  $L^2(\Omega)$  si et seulement si  $\alpha + \lambda < 1$ . Si le paramètre  $\alpha$  est choisi de façon à ce que  $\alpha > 1 - \lambda$ , nous avons nécessairement  $c_{\lambda, S} = 0$ . Signalons que pour un sommet  $S$  qui se trouve à l'extrémité d'une arête  $F \in \mathcal{F}_I$ , nous obtenons comme au paragraphe 2.3 que  $\varepsilon \partial_n g_\alpha \in H^{-1}(F)$  (au lieu de  $\tilde{H}^{-3/2}(F)$ ). Cette régularité supplémentaire permet de montrer que  $c_{\lambda, S} = 0$  pour tout  $\lambda \in \Lambda_{\varepsilon, S}^{\text{Dir}} \cap ]1/2, 1[$  quel que soit le choix du paramètre  $\alpha$ . En résumé, nous avons le

**Théorème 2.6. [Résultat de densité 2D]**

Soit  $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$  un sous-ensemble des sommets de  $\Omega$  tel que

$$\{S \in \mathcal{S}_D \cup \mathcal{S}_{\text{int}} \mid \Lambda_{\varepsilon, S}^{\text{Dir}} \cap ]0, 1[ \neq \emptyset\} \cup \{S \in \mathcal{S}_I \mid \Lambda_{\varepsilon, S}^{\text{Dir}} \cap ]0, 1/2[ \neq \emptyset\} \subset \mathcal{S}_0.$$

Soit la fonction poids

$$w(\mathbf{x}) = \prod_{S \in \mathcal{S}_0} r_S(\mathbf{x}). \quad (2.42)$$

Soit  $Y = L_\alpha^2(\Omega)$  avec  $\alpha \in [0, 1[$  tel que

$$\alpha > 1 - \min \left\{ \bigcup_{S \in \mathcal{S}_D \cup \mathcal{S}_{\text{int}}} (\Lambda_{\varepsilon, S}^{\text{Dir}} \cap ]0, 1[) \cup \bigcup_{S \in \mathcal{S}_I} (\Lambda_{\varepsilon, S}^{\text{Dir}} \cap ]0, 1/2[) \right\}.$$

Supposons que  $1 \notin \Delta_{\varepsilon, S}^{\text{Dir}}$  pour tout sommet  $S \in \mathcal{S}$ .

Alors  $\text{PH}^2(\Omega; \mathcal{P}) \cap H[Y]$  est dense dans  $H[Y]$  (et  $\text{PH}^1(\Omega; \mathcal{P}) \cap W[Y]$  est dense dans  $W[Y]$ ). □

Dans la définition (2.42) de la fonction poids  $w$ , on voit que la régularisation à poids est "active" au voisinage des seuls sommets de l'ensemble  $\mathcal{S}_0$ . Elle permet notamment de rétablir la densité là où elle n'avait pas lieu pour une régularisation classique (cf. Théorème 2.3). En même temps, le résultat du Théorème 2.6 indique que l'on peut "activer" la régularisation à poids même pour un sommet qui ne viole pas les conditions de densité de la régularisation classique. Ceci peut s'avérer intéressant dans une configuration où l'on a la densité et donc la convergence de la méthode des éléments finis nodaux, mais où l'ordre de convergence est extrêmement faible.

**La fonction poids en 3D**

En trois dimensions d'espace, la définition de la fonction poids est plus délicate car elle doit faire cohabiter la distance du point  $\mathbf{x}$  aux arêtes  $e \in \mathcal{E}$ ,  $d_{\mathcal{E}}(\mathbf{x}) = \text{dist}(\mathbf{x}, \mathcal{E})$ , et la distance de  $\mathbf{x}$  aux sommets  $S \in \mathcal{S}$ ,  $d_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}) = \text{dist}(\mathbf{x}, \mathcal{S})$ . Il est clair que dans un voisinage de l'arête  $e$  "éloigné" de tout sommet  $S \in \mathcal{S}$ , la distance  $d_{\mathcal{E}}$  est équivalent au rayon  $r_e$  des coordonnées cylindriques  $(r_e, \theta_e, z_e)$  en  $e$ . De même, la distance  $d_{\mathcal{S}}$  est équivalent au rayon  $r_S$  des coordonnées sphériques  $(r_S, \sigma_S)$  au voisinage du sommet  $S$ . Afin de tenir compte de l'interaction entre arêtes et sommets, nous définissons pour toute arête  $e \in \mathcal{E}$  une nouvelle distance  $\rho_e$  par

$$r_e = \rho_e r_S r_{S'},$$

où  $S$  et  $S'$  sont les extrémités de l'arête  $e$ . Au voisinage de  $S$ , on a

$$\rho_e \approx \vartheta_{S,e}$$

où  $\vartheta_{S,e}$  désigne la distance angulaire d'un point  $\sigma_S$  de la sphère unité  $G_S$  à l'arête  $e$ , tandis que

$$\rho_e \approx d_{\mathcal{E}}(\mathbf{x})$$

loin des sommets. On définit alors la fonction poids  $w$  par

$$w(\mathbf{x}) = \left( \prod_{S \in \mathcal{S}_0} r_S \right) \left( \prod_{E \in \mathcal{E}_0} \rho_e \right). \quad (2.43)$$

Ici,  $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$  (resp.  $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}$ ) désigne l'ensemble des sommets (resp. arêtes) où la régularisation à poids est "active". Une définition précise de ces ensembles est donnée dans le Théorème 2.7 ci-dessous. Notons dès à présent que  $\mathcal{E}_0$  et  $\mathcal{S}_0$  sont liées par la condition de compatibilité suivante :

$$\text{Pour toute arête } e \in \mathcal{E}_0 \text{ de sommets } S \text{ et } S', \text{ on a } S \in \mathcal{S}_0 \text{ et } S' \in \mathcal{S}_0. \quad (2.44)$$

**Théorème 2.7. [Résultat de densité 3D]**

Soit  $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}$  un sous-ensemble des arêtes de  $\Omega$  tel que

$$\{e \in \mathcal{E}_D \cup \mathcal{E}_{\text{int}} \mid \Lambda_{\varepsilon,e}^{\text{Dir}} \cap ]0, 1[ \neq \emptyset\} \cup \{e \in \mathcal{E}_I \mid \Lambda_{\varepsilon,e}^{\text{Dir}} \cap ]0, 1/2[ \neq \emptyset\} \subset \mathcal{E}_0.$$

Soit  $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$  un sous-ensemble des sommets de  $\Omega$  vérifiant (2.44) et tel que

$$\{S \in \mathcal{S}_D \cup \mathcal{S}_{\text{int}} \mid \Lambda_{\varepsilon,S}^{\text{Dir}} \cap ]0, 1/2[ \neq \emptyset\} \subset \mathcal{S}_0.$$

Soit  $Y = L_\alpha^2(\Omega)$  avec  $\alpha \in [0, 1[$  tel que

$$\begin{aligned} \alpha &> 1 - \min(\Lambda_{\varepsilon,e}^{\text{Dir}} \cap ]0, 1[), \quad \forall e \in \mathcal{E}_0 \cap (\mathcal{E}_D \cup \mathcal{E}_{\text{int}}), \\ \alpha &> 1 - \min(\Lambda_{\varepsilon,e}^{\text{Dir}} \cap ]0, 1[), \quad \forall e \in \mathcal{E}_0 \cap \mathcal{E}_I, \\ \alpha &> 1/2 - \min(\Lambda_{\varepsilon,S}^{\text{Dir}} \cap ]0, 1/2[) \quad \forall S \in \mathcal{S}_0 \cap (\mathcal{S}_D \cup \mathcal{S}_{\text{int}}). \end{aligned}$$

Soit la fonction poids  $w$  définie par (2.43). Supposons finalement que  $1/2 \notin \Delta_{\varepsilon,S}^{\text{Dir}}$  pour tout sommet  $S \in \mathcal{S}$  et  $1 \notin \Lambda_{\varepsilon,e}^{\text{Dir}}$  pour toute arête  $e \in \mathcal{E}$ .

Alors  $\text{PH}^2(\Omega; \mathcal{P}) \cap H[Y]$  est dense dans  $H[Y]$  (et  $\text{PH}^1(\Omega; \mathcal{P}) \cap W[Y]$  est dense dans  $W[Y]$ ).

□

**2.4.3 Discrétisation et résultats numériques**

Les résultats de densité des sections précédentes garantissent la convergence d'une méthode d'éléments finis nodaux conforme dans  $H^1$ . Nous avons implémenté une telle méthode pour une configuration 2D de trois sous-domaines formant un domaine en L (Figure 2.2). La seule singularité se situe au niveau du sommet rentrant  $(0, 0)$ .

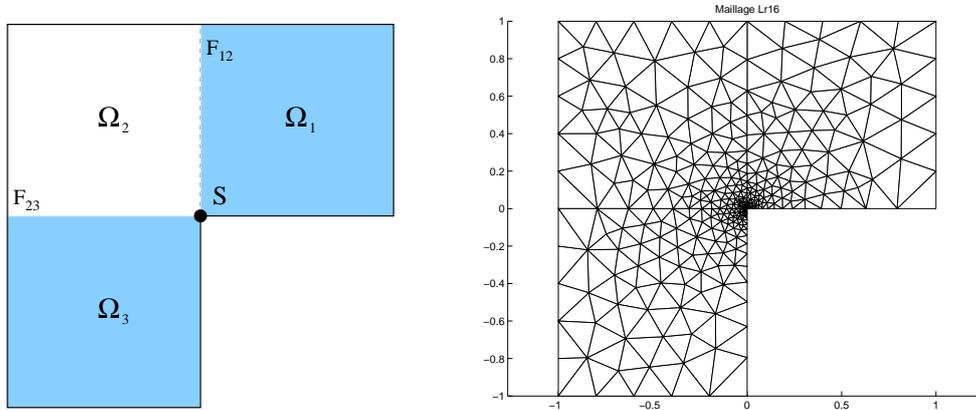


FIGURE 2.2 – Configuration de type  $L$ -shape avec 3 sous-domaines (à gauche) et maillage raffiné (à droite).

Les coefficients des trois matériaux ont été choisis de façon à générer des solutions ayant de très fortes singularités ( $\min \Lambda_{\varepsilon,S}^{\text{Dir}}$  proche de 0). Les simulations ci-dessous correspondent au choix  $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 0.5$  et  $\varepsilon_2 = 1$  pour une solution exacte de la forme  $\nabla S_\lambda$ . La condition du Théorème 2.6 se lit alors

$$\alpha > 0.47.$$

Nous avons testé plusieurs choix de  $\alpha$  vérifiant cette contrainte. Il se trouve que l'approximation est meilleure pour une valeur de  $\alpha$  proche de 1. Sur la Figure 2.3, nous comparons la méthode de régularisation à poids (graphique de droite) avec une méthode de régularisation classique

(graphique de gauche). Il paraît clairement que la régularisation classique n'est pas capable de reconstituer le comportement singulier du champ électrique.

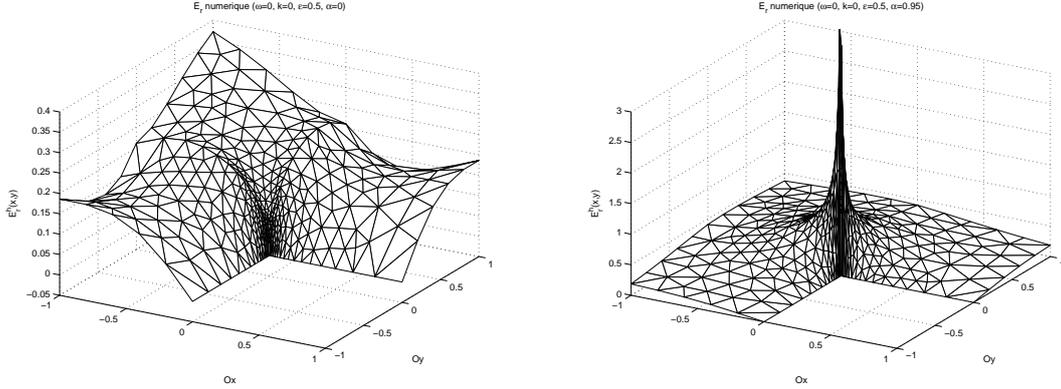


FIGURE 2.3 – Approximation par éléments finis nodaux *sans* régularisation à poids (à gauche) et *avec* régularisation à poids (à droite,  $\alpha = 0.95$ ).

Afin de reproduire au mieux le comportement singulier, nous avons utilisé un maillage raffiné au voisinage du sommet rentrant et des éléments finis de type P2. Une attention particulière a été apportée à la prise en compte des conditions de transmission à travers les interfaces (segments  $F_{12}$  et  $F_{23}$  de la Figure 2.2). En effet, contrairement aux éléments finis d'arêtes qui assurent naturellement la continuité de la trace tangentielle des champs à travers les interfaces, cette continuité, ainsi que la condition  $[\varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}] = 0$ , doit être implémentée explicitement pour les éléments finis nodaux. Expliquons succinctement l'idée de cette implémentation. Lors de l'assemblage, les inconnues situées sur les interfaces matérielles  $F_{ee'}$  sont dédoublées. Nous les notons  $\vec{U}_I^e$  et  $\vec{U}_I^{e'}$  respectivement. Si  $\mathbf{n}_{ee'} = n_{ee',x} \mathbf{e}_x + n_{ee',y} \mathbf{e}_y$  désigne le vecteur unitaire normal à  $F_{ee'}$ , les conditions de transmission en un nœud  $M_I$  de  $F_{ee'}$  s'écrivent

$$\vec{U}_I^e \times \mathbf{n}_{ee'} = \vec{U}_I^{e'} \times \mathbf{n}_{ee'} \text{ et } \varepsilon_e \vec{U}_I^e \cdot \mathbf{n}_{ee'} = \varepsilon_{e'} \vec{U}_I^{e'} \cdot \mathbf{n}_{ee'}, \quad (2.45)$$

où, de façon équivalente, sous forme matricielle

$$\mathbb{D}_e \mathbb{R}_{ee'}^t \vec{U}_I^e = \mathbb{D}_{e'} \mathbb{R}_{ee'}^t \vec{U}_I^{e'} \quad (2.46)$$

avec les matrices

$$\mathbb{D}_e = \begin{pmatrix} \varepsilon_e & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{D}_{e'} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{e'} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbb{R}_{e,e'} = \begin{pmatrix} n_{ee',x} & -n_{ee',y} \\ n_{ee',y} & n_{ee',x} \end{pmatrix}.$$

La matrice  $\mathbb{R}_{ee'}$  définit le passage de la base canonique  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$  à la base locale constituée des vecteurs normal et tangent à  $F_{e,e'}$ . Dans la base locale, les conditions de transmission sont découplées et permettent l'élimination des inconnues  $\vec{U}_I^{e'}$  au profit de  $\vec{U}_I^e$ . La situation se complique lorsque  $M_I$  coïncide avec un sommet  $S \in \mathcal{S}$  de  $\Omega$  : dans ce cas-là, il y a autant d'inconnues attachées à  $M_I$  que de sous-domaines  $\Omega_p$  ayant  $S$  pour sommet. Ces inconnues sont couplées par les conditions de transmission qui forment un système linéaire homogène dont il faut déterminer les éventuelles solutions non triviales. Différents cas de figure ont été étudiés dans [39].

#### 2.4.4 Conclusion

Depuis les travaux de Costabel et Dauge [44], la régularisation à poids des équations de Maxwell est apparue comme une alternative aux méthodes de type 'champs singuliers' tout en gardant une discrétisation basée sur les éléments finis nodaux. Nous avons mis en évidence la

performance de cette approche dans le cas des matériaux composites où la singularité principale du champ électromagnétique peut être particulièrement forte. Contrairement aux méthodes de type 'champs singuliers', la régularisation à poids ne nécessite pas une implémentation de la singularité, il suffit de connaître une borne inférieure pour le coefficient du poids. Ceci présente un grand avantage surtout pour l'application de la méthode dans des géométries 3D. La mise en œuvre de la méthode est néanmoins technique et nécessite, dans le cas des matériaux composites, une analyse au cas par cas. Ceci peut constituer un frein à son intégration dans des codes généraux d'éléments finis.

## 2.5 Une méthode de Galerkin discontinue

Dans cette section, nous étudions une autre classe de méthodes de discrétisation, à savoir les méthodes de Galerkin discontinues. Développées depuis les années 1970 pour l'équation du transport des neutrons [98, 69], ces méthodes ont connu un essor dans le domaine de l'électromagnétisme numérique pendant la dernière décennie. Pour les équations de Maxwell harmoniques en temps, on peut citer les travaux de Perugia, Schötzau et leurs co-auteurs [65, 66, 90] où différentes approches basées sur la formulation classique ou mixte, ont été développées et testées. Un des avantages des méthodes de Galerkin discontinues est leur grande flexibilité vis à vis des fonctions de formes qui peuvent être adaptées localement aux besoins de la discrétisation. Ceci permet la prise en compte naturelle de tout changement local dans les paramètres électromagnétiques et s'avère donc particulièrement adapté aux matériaux composites. Notons toutefois que l'analyse de convergence des travaux précités requiert en général un minimum de régularité de la solution exacte. Or, comme nous avons pu le constater dans les paragraphes précédents, le champ électromagnétique présente des singularités fortes au voisinage des sommets et interfaces des différents matériaux. Dans cette section qui résume les résultats de [LN07], nous proposons donc une méthode de Galerkin discontinue de type 'pénalisation intérieure' pour laquelle nous analysons en particulier le comportement au voisinage des singularités. Nous verrons qu'un raffinement adéquat du maillage au voisinage des singularités géométriques permet d'obtenir une convergence optimale.

### 2.5.1 Formulation du problème et résultats de régularité

Nous nous limitons à des géométries 2D. Soit alors  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un polygone du plan et soit  $\mathcal{P}$  une partition de  $\Omega$  en sous-domaines  $\Omega_j$  induite par les coefficients électromagnétiques du matériau composite occupant  $\Omega$  (cf §2.2.1).

Pour une pulsation  $\omega \in \mathbb{R}^+$  donnée, nous cherchons le champ électrique  $\mathbf{E}$ , solution du problème (2.5). Nous supposons dans cette section que le matériau est entouré d'un conducteur parfait de sorte que  $\Gamma_I = \emptyset$  et  $\Gamma_D = \Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \partial\Omega$ . La formulation variationnelle régularisée s'écrit alors

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{E} \in \mathcal{H}_0(\text{curl}; \Omega) \cap \mathcal{H}(\text{div } \varepsilon; \Omega) \text{ tel que} \\ a(\mathbf{E}, \mathbf{F}) - \omega^2(\varepsilon \mathbf{E}, \mathbf{F}) = i\omega(\mathbf{J}_s, \mathbf{F}) \quad \forall \mathbf{F} \in \mathcal{H}_0(\text{curl}; \Omega) \cap \mathcal{H}(\text{div } \varepsilon; \Omega), \end{cases} \quad (2.47)$$

avec

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mu^{-1} \text{curl } \mathbf{u} \cdot \overline{\text{curl } \mathbf{v}} \, dx + s \int_{\Omega} \text{div}(\varepsilon \mathbf{u}) \overline{\text{div}(\varepsilon \mathbf{v})} \, dx$$

pour un paramètre  $s > 0$  donné. D'après les résultats du Théorème 2.3 de la section 2.3, la solution de (2.47) s'écrit

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_R + \sum_{S \in \mathcal{S}} \sum_{\lambda \in \Lambda_{\varepsilon, S}^{\text{Dir}} \cap ]0, 1[} c_{\lambda, S} \nabla S_{\lambda, S}. \quad (2.48)$$

On peut noter que la somme porte sur les exposants singuliers entre  $]0, 1[$  pour tous les sommets car l'ensemble  $\mathcal{S}_I$  des sommets du bord d'impédance  $\Gamma_I$  est vide. Par la définition des fonctions

singulières  $S_{\lambda,S}$  (cf. 2.13), on peut montrer facilement que l'espace  $\mathcal{H}_0(\text{curl}; \Omega) \cap \mathcal{H}(\text{div } \varepsilon; \Omega)$  s'injecte de façon continue dans un certain espace de Sobolev à poids. En effet, pour  $\alpha > 0$  soit

$$\mathbf{PH}^{m,\alpha}(\Omega) = \left\{ \varphi \in H^{m-1}(\Omega) \mid r^\alpha D^\beta(\varphi|_{\Omega_j}) \in L^2(\Omega_p), \forall |\beta| = m, \forall j = 1, \dots, J_S \right\}, \quad (2.49)$$

où  $r(\mathbf{x})$  désigne la distance d'un point  $\mathbf{x}$  à l'ensemble des sommets  $\mathcal{S}$ .  $\mathbf{PH}^{m,\alpha}(\Omega)$  est un Hilbert pour la norme

$$\|\varphi\|_{m,\alpha} = \left( \|\varphi\|_{m-1,\Omega}^2 + \sum_{j=1}^{J_S} \sum_{|\beta|=m} \|r^\alpha D^\beta(\varphi|_{\Omega_j})\|_{0,\Omega_j}^2 \right)^{1/2}.$$

Alors

$$\mathcal{H}_0(\text{curl}; \Omega) \cap \mathcal{H}(\text{div } \varepsilon; \Omega) \hookrightarrow \mathbf{PH}^{1,\alpha}(\Omega)$$

pour tout  $\alpha \in ]0, 1[$  tel que

$$\alpha > 1 - \min \left\{ \bigcup_{S \in \mathcal{S}} \Lambda_{\varepsilon,S}^{\text{Dir}} \right\}. \quad (2.50)$$

### 2.5.2 Discrétisation par une méthode de Galerkin discontinue

Précisons maintenant la discrétisation du problème régularisé (2.47) par une méthode de Galerkin discontinue. Pour cela, soit  $\mathcal{T}_h$  une triangulation de  $\Omega$  respectant la partition  $\mathcal{P}$  de  $\Omega$  en sous-domaines  $\Omega_j$ . Nous supposons que  $\mathcal{T}_h$  satisfait les conditions habituelles de régularité au sens de [36]. Soit  $\mathcal{E}$  l'ensemble des arêtes du maillage  $\mathcal{T}_h$ . Nous distinguons entre les arêtes du bord, appelées *extérieures*,  $\mathcal{E}_{\text{ext}} = \{e \in \mathcal{E} \mid e \subset \Gamma\}$ , et les arêtes intérieures,  $\mathcal{E}_{\text{int}} = \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_{\text{ext}}$ . Pour chaque arête  $e \in \mathcal{E}$ , notons  $h_e$  sa longueur. Le diamètre  $h_K$  d'un élément  $K \in \mathcal{T}_h$  est alors donné par  $h_K = \max_{e \subset \partial K} h_e$ . Finalement, posons  $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$ .

Introduisons à présent les opérateurs de 'trace moyenne', de 'saut tangentiel' et de 'saut normal' : soit  $e \in \mathcal{E}_{\text{int}}$  une arête intérieure et soient  $K_\ell$  et  $K_m$  les deux éléments de  $\mathcal{T}_h$  séparées par  $e$ . Pour tout champ de vecteur  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v}_\ell$  (resp.  $\mathbf{v}_m$ ) désigne la restriction de  $\mathbf{v}$  à l'élément  $K_\ell$  (resp.  $K_m$ ). Nous posons

$$\{\mathbf{v}\} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_{|\ell} + \mathbf{v}_{|m}), \quad (2.51a)$$

$$[[\mathbf{v}]]_T = \mathbf{v}_{|\ell} \times \mathbf{n}_\ell + \mathbf{v}_{|m} \times \mathbf{n}_m, \quad (2.51b)$$

$$[[\mathbf{v}]]_N = \mathbf{v}_{|\ell} \cdot \mathbf{n}_\ell + \mathbf{v}_{|m} \cdot \mathbf{n}_m. \quad (2.51c)$$

Ces notions ont un sens si  $\mathbf{v}$  appartient à l'espace 'produit'

$$\mathbf{H}^s(\mathcal{T}_h) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{K \in \mathcal{T}_h} \mathbf{H}^s(K)$$

pour  $s > 1/2$ . De même, nous introduisons la moyenne et le saut normal pour une fonction  $\varphi \in H^s(\mathcal{T}_h) = \prod_{K \in \mathcal{T}_h} H^s(K)$  par

$$\{\varphi\} = \frac{1}{2}(\varphi_{|\ell} + \varphi_{|m}), \quad (2.52a)$$

$$[[\varphi]]_N = \varphi_{|\ell} \mathbf{n}_\ell + \varphi_{|m} \mathbf{n}_m. \quad (2.52b)$$

Notons finalement que pour toute arête du bord  $e \in \mathcal{E}_{\text{ext}}$ , les définitions (2.51) se lisent

$$\{\mathbf{v}\} = \mathbf{v}_{|e} \text{ et } [[\mathbf{v}]]_T = \mathbf{v}_{|e} \times \mathbf{n},$$

du fait qu'il existe un seul élément  $K$  qui a  $e$  pour arête.

L'espace de discrétisation de la méthode de Galerkin discontinue que nous allons développer est défini par

$$V_h^{\text{DG}} = \{ \mathbf{v}_h \in \mathbf{L}^2(\Omega) \mid \mathbf{v}_h|_K \in \mathcal{P}_K \forall K \in \mathcal{T}_h \}. \quad (2.53)$$

Ici,  $\mathcal{P}_K$  est un espace de dimension finie constitué de polynômes définis sur l'élément  $K \in \mathcal{T}_h$ . Plus précisément, nous allons supposer dans la suite que  $\mathcal{P}_K$  vérifie l'hypothèse

$$\mathcal{R}_K \subset \mathcal{P}_K, \quad (2.54)$$

où  $\mathcal{R}_K$  désigne l'espace des éléments finis d'arêtes de première espèce (cf. Section 1.5.1, (1.26)).

Pour tout champ  $\mathbf{u}_h \in V_h^{\text{DG}}$ , l'opérateur rotationnel par morceaux  $\text{curl}_h$  est bien défini par

$$(\text{curl}_h \mathbf{u}_h)|_K = \text{curl} \mathbf{u}|_K \quad \forall K \in \mathcal{T}_h.$$

De même, on introduit la divergence par morceaux  $\text{div}_h$  en posant

$$(\text{div}_h \mathbf{u}_h)|_K = \text{div} \mathbf{u}|_K \quad \forall K \in \mathcal{T}_h.$$

Le problème discret associé au problème régularisé (2.47) s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{u}_h \in V_h^{\text{DG}} \text{ tel que} \\ \mathcal{B}_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - \omega^2(\varepsilon \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = i\omega(\mathbf{J}_s, \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h^{\text{DG}}, \end{cases} \quad (2.55)$$

où la forme bilinéaire  $\mathcal{B}_h(\cdot, \cdot)$  est définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &= \int_{\Omega} \mu^{-1} \text{curl}_h \mathbf{u}_h \text{curl}_h \mathbf{v}_h \, dx + s \int_{\Omega} \text{div}_h \varepsilon \mathbf{u}_h \text{div}_h \varepsilon \mathbf{v}_h \, dx \\ &+ \sum_{e \in \mathcal{E}} \int_e \{ \mu^{-1} \text{curl}_h \mathbf{u}_h \} [[\mathbf{v}_h]]_T \, ds + \sum_{e \in \mathcal{E}} \int_e \{ \mu^{-1} \text{curl}_h \mathbf{v}_h \} [[\mathbf{u}_h]]_T \, ds \\ &+ \beta_T \sum_{e \in \mathcal{E}} h_e^{-1} \int_e [[\mathbf{u}_h]]_T [[\mathbf{v}_h]]_T \, ds + \beta_N \sum_{e \in \mathcal{E}_{\text{int}}} h_e \int_e [[\varepsilon \mathbf{u}_h]]_N [[\varepsilon \mathbf{v}_h]]_N \, ds. \end{aligned} \quad (2.56)$$

La forme bilinéaire dépend de deux paramètres  $\beta_T > 0$  et  $\beta_N \geq 0$  qui garantissent les bonnes propriétés de  $\mathcal{B}_h(\cdot, \cdot)$  :

**Consistance de la méthode :** soit  $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_0(\text{curl}; \Omega) \cap \mathcal{H}(\text{div} \varepsilon; \Omega)$  la solution du problème régularisé (2.47). Sous l'hypothèse de l'équivalence entre les problèmes classique et régularisé, on a  $\text{div}(\varepsilon \mathbf{u}) = 0$  dans  $\Omega$ . On montre alors que  $\mathcal{B}_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) = (\mathbf{curl} \mu^{-1} \text{curl} \mathbf{u}, \mathbf{v}_h)$  quel que soit  $\mathbf{v}_h \in V_h^{\text{DG}}$ .

**Relation d'orthogonalité :** si  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{u}_h$  désignent respectivement la solution du problème régularisé (2.47) et celle du problème discret (2.55), on a

$$\mathcal{B}_h(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - \omega^2(\varepsilon(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h), \mathbf{v}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h^{\text{DG}}. \quad (2.57)$$

**Norme discrète :** pour tout  $\beta_N \geq 0$ , la semi-norme  $|\cdot|_{h, \beta_N} : \mathbf{v}_h \in V_h^{\text{DG}} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}_h|_{h, \beta_N}^2 &= \|\text{curl}_h \mathbf{v}_h\|_{0, \Omega}^2 + \|\text{div}_h \varepsilon \mathbf{v}_h\|_{0, \Omega}^2 \\ &+ \sum_{e \in \mathcal{E}} h_e^{-1} \|[[\mathbf{v}_h]]_T\|_{0, e}^2 + \beta_N \sum_{e \in \mathcal{E}_{\text{int}}} h_e \|[[\varepsilon \mathbf{v}_h]]_N\|_{0, e}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{e \subset \partial K} h_e \|\text{curl} \mathbf{v}_h\|_{0, e}^2. \end{aligned}$$

définit une norme sur l'espace de discrétisation  $V_h^{\text{DG}}$ .

**Continuité de la forme bilinéaire :**  $\mathcal{B}(\cdot, \cdot)$  est continue sur  $V_h^{\text{DG}} \times V_h^{\text{DG}}$  muni de la norme  $|\cdot|_{h, \beta_N}$ . Le dernier terme dans la définition de la norme  $|\cdot|_{h, \beta_N}$  peut paraître surprenant à première vue car il ne figure pas dans la forme bilinéaire  $\mathcal{B}_h(\cdot, \cdot)$ . Il permet d'établir la continuité de  $\mathcal{B}_h(\cdot, \cdot)$  pour une classe plus grande de champs  $\mathbf{u}$ . Ainsi, on a

$$|\mathcal{B}_h(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \lesssim |\mathbf{u}|_{h, \beta_N} |\mathbf{v}|_{h, \beta_N} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{D}(\mathcal{B}).$$

Ici, le domaine de définition  $\mathcal{D}(\mathcal{B})$  de la forme bilinéaire  $\mathcal{B}(\cdot, \cdot)$  est donné par tous les champs  $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  pour lesquels  $\text{curl}_h \mathbf{u}$  et  $\text{div}_h \mathbf{u}$  appartient à  $L^2(\Omega)$ ,  $[[\mathbf{u}]]_T$  et  $[[\mathbf{u}]]_N$  appartient à  $L^2(e)$  quelle que soit  $e \in \mathcal{E}$  et  $(\text{curl} \mathbf{u}_K)|_e$  appartient à  $L^2(e)$  quels que soient  $e \subset \partial K$  et  $K \in \mathcal{T}_h$ . En particulier, la solution  $\mathbf{u}$  du problème régularisé (2.47) appartient à  $\mathcal{D}(\mathcal{B})$ .

**Coercivité de la forme bilinéaire :**  $\mathcal{B}(\cdot, \cdot)$  est coercive sur  $V_h^{\text{DG}} \times V_h^{\text{DG}}$  muni de la norme  $|\cdot|_{h, \beta_N}$  pourvu que le paramètre  $\beta_T$  soit choisi suffisamment grand. La borne pour  $\beta_T$  est indépendante de  $h$ . Elle dépend des bornes de  $\varepsilon$ , du degré des polynômes des espaces  $\mathcal{P}_K$  ainsi que du paramètre de régularité du maillage.

Ces propriétés garantissent l'existence d'une solution unique du problème discret (2.55) dans le cas  $\omega = 0$  et permettent d'obtenir une estimation de type 'Lemme de Céa' :

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{h, \beta_N} \lesssim \inf_{\mathbf{v}_h \in V_h^{\text{DG}}} |\mathbf{u} - \mathbf{v}_h|_{h, \beta_N} \quad (2.58)$$

quelle que soit la valeur de  $\beta_N \geq 0$ . Pour  $\omega \neq 0$ , nous obtenons

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{h, \beta_N} \lesssim \inf_{\mathbf{v}_h \in V_h^{\text{DG}}} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{h, \beta_N} + (1 + \omega^2) \sup_{\mathbf{w}_h \in V_h^{\text{DG}}} \frac{(\varepsilon(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h), \mathbf{w}_h)}{\|\mathbf{w}_h\|_{h, \beta_N}}, \quad (2.59)$$

où la norme  $\|\cdot\|_{h, \beta_N}$  est obtenue à partir de la (semi-)norme  $|\cdot|_{h, \beta_N}$  en rajoutant la norme  $L^2$ . L'existence et l'unicité seront alors une conséquence de la convergence de la méthode.

### 2.5.3 Convergence optimale de la méthode

Dans ce paragraphe, nous étudions la convergence de la méthode de Galerkin discontinue définie dans la section 2.5.2. En vue des estimations abstraites (2.58) et (2.59), il convient de trouver le 'bon' candidat  $\mathbf{v}_h \in V_h^{\text{DG}}$  qui permet d'estimer le terme  $\inf_{\mathbf{v}_h \in V_h^{\text{DG}}} |\mathbf{u} - \mathbf{v}_h|_{h, \beta_N}$ . L'hypothèse (2.54) garantit que l'interpolée  $\mathbf{r}_h \mathbf{u}$  qui interpole  $\mathbf{u}$  sur la base des fonctions des éléments finis d'arête, appartient à l'espace de discrétisation de la méthode de Galerkin discontinue  $V_h^{\text{DG}}$ .

Rappelons que le champ électrique, solution de (2.47), présente des singularités aux sommets des sous-domaines  $\Omega_j$ . Ces singularités entraînent en général un ralentissement de la convergence. Nous montrons ici qu'il est possible de raffiner le maillage au voisinage des singularités géométriques de façon à rétablir un ordre de convergence optimal.

Pour cela, nous reprenons une idée de [97, 59] : pour  $K \in \mathcal{T}_h$ , nous désignons par  $r_K$  la distance de  $K$  à l'ensemble des sommets de la partition  $\mathcal{P}$  :  $r_K = \inf_{P \in K, P_0 \in \mathcal{S}} |P - P_0|$ . Le maillage  $\mathcal{T}_h$  est dit *raffiné avec un paramètre de raffinement*  $\gamma \in ]0, 1]$  dans un disque de rayon  $R$  s'il existe trois constantes  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ,  $0 < \sigma_i \leq 1$ , telles que

$$\begin{aligned} \sigma_1 h^{\frac{1}{\gamma}} &\leq h_K \leq \sigma_1^{-1} h^{\frac{1}{\gamma}} && \forall K \in \mathcal{T}_h : r_K = 0, \\ \sigma_2 h r_K^{1-\gamma} &\leq h_K \leq \sigma_2^{-1} h r_K^{1-\gamma} && \forall K \in \mathcal{T}_h : 0 < r_K < R, \\ \sigma_3 h &\leq h_K \leq \sigma_3^{-1} h && \forall K \in \mathcal{T}_h : r_K \geq R \end{aligned} \quad (2.60)$$

Nous avons montré dans la section 2.5.1 que le champ électrique appartient à l'espace à poids  $\mathbf{PH}^{1, \alpha}(\Omega; \mathcal{P})$  pour tout  $\alpha \in ]0, 1[$  vérifiant l'inégalité (2.50). La proposition suivante montre qu'un

raffinement de paramètre  $\gamma < 1 - \alpha$  conduit à une erreur d'interpolation de  $\mathcal{O}(h)$  pour la famille des éléments finis d'arête.

**Proposition 2.1.**

Soit  $\mathbf{u} \in \mathbf{PH}^{1,\alpha}(\Omega; \mathcal{P})(\Omega)$  pour  $0 < \alpha < 1$ . Supposons que  $\text{curl } \mathbf{u} \in L^2(\Omega)$ . Soit  $\mathcal{T}_h$  un maillage raffiné avec un paramètre  $\gamma$  tel que  $0 < \gamma < 1 - \alpha$ . Notons  $\mathbf{r}_h \mathbf{u} \in X_h^{\text{edge}}$  l'interpolée de  $\mathbf{u}$  dans l'espace des éléments finis d'arête définie dans la section 1.5.1. Alors,

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{r}_h \mathbf{u}\|_{0,\Omega} \lesssim h (\|r^\alpha \nabla \mathbf{u}\|_{0,\Omega} + \|\text{curl } \mathbf{u}\|_{0,\Omega}).$$

Si de plus  $\mu^{-1} \text{curl } \mathbf{u} \in H^1(\Omega)$ , on a

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{r}_h \mathbf{u}\|_{\mathcal{H}(\text{curl}; \Omega)} \lesssim h (\|r^\alpha \nabla \mathbf{u}\|_{0,\Omega} + \|\mu^{-1} \text{curl } \mathbf{u}\|_{1,\Omega}).$$

□

Sur la base de cette proposition, on peut établir des estimations en  $\mathcal{O}(h)$  pour tous les autres termes de la norme  $|\cdot|_{h,\beta_N}$  ce qui permet de montrer la convergence de la méthode de Galerkin discontinue dans le cas  $\omega = 0$  :

**Théorème 2.8. [Convergence dans le cas  $\omega = 0$ ]**

Soit  $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_0(\text{curl}; \Omega) \cap \mathcal{H}(\text{div } \varepsilon; \Omega)$  la solution du problème régularisé (2.47) avec  $\omega = 0$ . Soit  $\mathbf{J}_s \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  et  $\text{div } \mathbf{J}_s = 0$  dans  $\Omega$ . Soit  $\alpha \in ]0, 1[$  tel que  $\mathbf{u} \in \mathbf{PH}^{1,\alpha}(\Omega)$ .

Soit  $\mathcal{T}_h$  un maillage de  $\Omega$  raffiné avec un paramètre  $\gamma$  tel que  $0 < \gamma < 1 - \alpha$ .

Soit  $V_h^{\text{DG}}$  l'espace de discrétisation de la méthode de Galerkin discontinue (2.55) qui vérifie la condition (2.54). Soit  $\beta_T > 0$  tel que la forme bilinéaire  $\mathcal{B}_h(\cdot, \cdot)$  soit coercive sur  $V_h^{\text{DG}} \times V_h^{\text{DG}}$ , et soit  $\beta_N \geq 0$ . Soit  $\mathbf{u}_h \in V_h^{\text{DG}}$  la solution du problème discret. Alors, l'erreur de discrétisation  $\mathbf{u} - \mathbf{u}_h$  vérifie l'estimation

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{h,\beta_N} \lesssim h \|\mathbf{J}_s\|_{0,\Omega}.$$

□

En regard de la définition de  $|\cdot|_{h,\beta_N}$ , le théorème 2.8 permet non seulement de contrôler l'erreur sur le rotationnel et la divergence (discrets), mais force également la convergence vers zéro des sauts tangentiels et normaux de la solution discrète, ceci avec un taux de  $h^{3/2}$  pour les sauts tangentiels et, plus faiblement, avec un taux de  $h^{1/2}$  pour les sauts normaux pourvu que  $\beta_N$  soit choisi non nul.

**Le cas  $\omega \neq 0$**

Dans le cas  $\omega \neq 0$ , les estimations d'erreur sont habituellement obtenues par une approche duale. Cette approche fait intervenir la notion de champs à *divergence nulle* dans un certain sens discret. Dans notre cas, nous pouvons montrer que

$$(\varepsilon(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h), \nabla \xi_h) = 0 \quad \forall \xi_h \in S_h, \tag{2.61}$$

pourvu que le paramètre  $\beta_N$  dans la définition de la forme bilinéaire  $\mathcal{B}_h(\cdot, \cdot)$  soit nul.  $S_h$  est l'espace des éléments finis de type P1 conforme dans  $H_0^1(\Omega)$  défini dans (1.35).

Néanmoins, la condition (2.54) ne suffit pas pour obtenir les estimations souhaitées. Ainsi, nous posons dans la suite

$$V_h^{\text{DG}} = \{ \mathbf{v}_h \in \mathbf{L}^2(\Omega) \mid \mathbf{v}_h|_K \in \mathcal{R}_K \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \}. \tag{2.62}$$

Notons que les champs de  $V_h^{\text{DG}}$  appartiennent localement à l'espace  $\mathcal{R}_K$  des éléments finis d'arêtes sans pour autant être à rotationnel  $L^2(\Omega)$  de sorte que  $V_h^{\text{DG}} \not\subset X_h^{\text{edge}}$  ! Par contre, nous avons  $\text{div}_h \mathbf{v}_h = 0$  pour tout  $\mathbf{v}_h \in V_h^{\text{DG}}$  du fait que les éléments de  $\mathcal{R}_K$  sont à divergence nulle sur  $K$ . Cette propriété est limitée aux éléments finis d'arête du plus bas degré.

D'après l'estimation abstraite (2.59) et comme l'erreur d'interpolation peut être estimée de la même façon que pour  $\omega = 0$ , il suffit d'analyser le terme

$$\frac{(\varepsilon(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h), \mathbf{w}_h)}{\|\mathbf{w}_h\|_{h, \beta_N}} \quad (2.63)$$

pour  $\mathbf{w}_h \in V_h^{\text{DG}}$  quelconque. Sans rentrer dans les détails, expliquons les idées principales qui permettent d'obtenir une estimation de (2.63).

1. Tout champ  $\mathbf{w}_h \in V_h^{\text{DG}}$  peut être approché par un champ de l'espace des éléments finis d'arête  $\mathbf{w}_h^{\text{edge}} \in X_h^{\text{edge}}$ . L'approximation est d'ordre  $h$  en norme  $L^2(\Omega)$ .
2. Par la décomposition de Helmholtz discrète,  $\mathbf{w}_h^{\text{edge}} \in X_h^{\text{edge}}$  s'écrit comme la somme d'un champ à divergence- $\varepsilon$  discrète nulle,  $\mathbf{w}_{h,0}^{\text{edge}} \in X_h^{\text{edge},0}$  et le gradient d'une fonction  $\xi_h \in S_h$ . D'après (2.61), seul le champ  $\mathbf{w}_{h,0}^{\text{edge}}$  doit être pris en compte.
3. Finalement,  $\mathbf{w}_{h,0}^{\text{edge}}$  peut être approché par un champ  $\mathbf{w}_0 \in \mathcal{H}_0(\text{curl}; \Omega)$  tel que  $\text{div}(\varepsilon \mathbf{w}_0) = 0$  dans  $\Omega$ . L'estimation est encore d'ordre  $h$  en norme  $L^2(\Omega)$ .

Il reste alors le terme  $(\varepsilon(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h), \mathbf{w}_0)$  à estimer : on a

$$(\varepsilon(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h), \mathbf{w}_0) = \mathcal{B}_h(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{z}) - \omega^2(\varepsilon(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h), \mathbf{z}) \quad (2.64)$$

où  $\mathbf{z} \in \mathcal{H}_0(\text{curl}; \Omega)$  est solution du problème dual avec second membre  $\mathbf{w}_0$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{curl} \mu^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{z} - \omega^2 \varepsilon \mathbf{z} &= \varepsilon \mathbf{w}_0, \\ \text{div}(\varepsilon \mathbf{z}) &= 0. \end{aligned}$$

La relation d'orthogonalité (2.57) permet d'introduire l'interpolée  $\mathbf{r}_h \mathbf{z} \in X_h^{\text{edge}} \subset V_h^{\text{DG}}$  dans (2.64), et on conclut par les estimations de l'erreur d'interpolation vues auparavant. Nous pouvons alors énoncer le

**Théorème 2.9. [Convergence dans le cas  $\omega \neq 0$ ]**

*Soit  $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_0(\text{curl}; \Omega) \cap \mathcal{H}(\text{div} \varepsilon; \Omega)$  la solution du problème régularisé (2.47) avec  $\omega \notin \text{sp}(\text{curl})$ . Soit  $\mathbf{J}_s \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  et  $\text{div} \mathbf{J}_s = 0$  dans  $\Omega$ . Soit  $\alpha \in ]0, 1[$  tel que  $\mathbf{u} \in \mathbf{PH}^{1,\alpha}(\Omega)$ .*

*Soit  $\mathcal{T}_h$  un maillage de  $\Omega$  raffiné avec un paramètre  $\gamma$  tel que  $0 < \gamma < 1 - \alpha$ .*

*Soit  $V_h^{\text{DG}}$  l'espace de discrétisation défini par (2.62). Soit  $\beta_T > 0$  tel que la forme bilinéaire  $\mathcal{B}_h(\cdot, \cdot)$  soit coercive sur  $V_h^{\text{DG}} \times V_h^{\text{DG}}$ , et soit  $\beta_N = 0$ . Soit  $\mathbf{u}_h \in V_h^{\text{DG}}$  une solution du problème discret (2.55). Alors, il existe  $h_0 > 0$  tel que l'erreur de discrétisation  $\mathbf{u} - \mathbf{u}_h$  vérifie l'estimation suivante,*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{h,0} \lesssim h \|\mathbf{J}_s\|_{0,\Omega} \quad (2.65)$$

*pour tout  $h < h_0$ .* □

L'existence et l'unicité du problème discret sont alors une conséquence immédiate de l'estimation (2.65). En effet, soit  $\mathbf{J}_s = 0$  dans  $\Omega$ . 0 est alors une solution triviale du problème discret. Comme  $\omega^2$  n'est pas une valeur propre du problème continu, on a  $\mathbf{u} = 0$ . D'après (2.65), toute solution discrète  $\mathbf{u}_h$  vérifie  $\|\mathbf{u}_h\|_{h,0} = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{h,0} \lesssim 0$  ce qui montre l'unicité. Comme  $V_h^{\text{DG}}$  est de dimension finie, l'unicité implique l'existence.

Il est important de noter que dans le cas  $\omega \neq 0$ ,  $\mathbf{u}_h$  est solution du problème discret (2.55) avec  $\beta_N = 0$ . Par conséquent, le théorème 2.9 ne donne aucune estimation des sauts normaux  $[[\varepsilon(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)]]_N$ . Il est néanmoins possible de montrer que

$$\sum_{e \in \mathcal{E}_{\text{int}}} h_e \| [[\varepsilon(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)]]_N \|_{0,e}^2 \lesssim \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega}^2 = \mathcal{O}(h).$$

Ceci est lié au fait que  $\text{div}(\varepsilon \mathbf{u}) = 0$  et  $\text{div}_h \mathbf{u}_h = 0$  dans  $\Omega$ .

#### 2.5.4 Conclusion

Les méthodes de type Galerkin discontinues peuvent être utilisées avantageusement pour la discrétisation des équations de Maxwell dans des matériaux composites à cause de leur grande flexibilité dans le choix des fonctions de base locales. Les travaux existants ne permettent pas de traiter l'apparition des fortes singularités au voisinage des arêtes et sommets des différents composants du matériau. Nous avons développé une méthode de Galerkin discontinue qui permet une analyse de convergence rigoureuse en présence de singularités géométriques, et nous obtenons un ordre de convergence optimal ( $\mathcal{O}(h)$ ) pour des éléments finis de degré 1 en raffinant le maillage de façon adéquate au voisinage des singularités. Notons que l'analyse porte sur des maillages conformes, mais que la méthode peut être implémentée pour des maillages non-conformes également. De même, il est possible de choisir localement des éléments finis de degré supérieur à 1. Globalement, l'ordre de convergence reste toutefois limité à 1 en raison du manque de régularité de la solution exacte. Notons finalement que notre méthode implique la convergence vers 0 des sauts normaux aux interfaces ce qui permet à la limite d'obtenir des solutions discrètes à divergence "presque nulle".

## Chapitre 3

# Schémas numériques avec flux centrés pour les équations de Maxwell dans le domaine spatio-temporel

Ce chapitre résume les travaux issus d'une collaboration avec des chercheurs du CERMICS à INRIA Sophia-Antipolis sur des méthodes de type Galerkin discontinu pour les équations de Maxwell dans le domaine spatio-temporel :

**[LR02]** S. LOHRENGEL ET M. REMAKI, A FV Scheme for Maxwell's equations – Convergence analysis on unstructured meshes, *Finite Volumes for Complex Applications III*, ed. R. Herbin & D. Kröner, Hermes, London, 2002, pp. 219–226. Prépublication Laboratoire J.A. Dieudonné, Nice.

**[FLLP05]** L. FEZOUI, S. LANTERI, S. LOHRENGEL ET S. PIPERNO, Convergence and stability of a discontinuous Galerkin time-domain method for the 3D heterogeneous Maxwell equations on unstructured meshes, *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* **39** (2005), pp. 1149–1176.

A la base de nos études est un schéma de volumes finis avec flux centrés développé par Remaki [99]. Ma contribution se situe essentiellement dans l'analyse de convergence de ce schéma ainsi que des méthodes de Galerkin discontinues d'ordre plus élevé qui généralisent l'approche volume fini.

### 3.1 Introduction et position du problème

Le schéma le plus célèbre pour la discrétisation des équations de Maxwell en temps et en espace est le schéma de Yee [107]. Développé en 1966, il reste une référence parmi les méthodes numériques en électromagnétisme et se trouve au cœur de nombreux solveurs actuels. Il est basé sur une discrétisation des champs par différences finies centrées avec un décalage de position entre le champ électrique  $\mathcal{E}$  et le champ magnétique  $\mathcal{H}$ . La discrétisation en temps est du type saute-mouton et conduit à un schéma totalement explicite qui est consistant d'ordre 2 en temps et en espace sur une grille régulière. Le schéma de Yee est stable sous la condition CFL

$$c\Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2}}}.$$

Ici,  $c$  désigne la vitesse de propagation du milieu (homogène et isotrope),  $\varepsilon\mu c^2 = 1$ , et  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  et  $\Delta z$  sont les paramètres de la grille.

Par rapport aux méthodes de différences finies, les méthodes d'éléments finis sont capables de prendre en compte des géométries complexes, mais conduisent en général à des calculs plus

lourds suite à la présence d'une matrice de masse globale dans le schéma totalement discrétisé. Des techniques de condensation de masse existent pour les éléments finis d'arête [51, 40].

Les méthodes de type volumes finis ou de Galerkin discontinue permettent l'utilisation de maillages non structurés sans pour autant produire des matrices de masse globales. Ces méthodes ont connu un grand succès dans la simulation des lois de conservation et sont naturellement basées sur une discrétisation décentrée amont [52, 92].

Dans un matériau non conducteur et en l'absence de sources, une propriété fondamentale des équations de Maxwell est la conservation de l'énergie électromagnétique. Au niveau discret, un bon schéma devrait par conséquent conserver une certaine énergie électromagnétique discrète. Les schémas décentrés sont alors d'une utilité limitée car la diffusion numérique rend les calculs imprécis lorsque l'intervalle en temps est grand. Le schéma de Remaki dont nous présentons dans la section 3.2 une brève analyse, est quant à lui basé sur des flux centrés et non dissipatif. L'ordre de convergence des méthodes de volumes finis étant limité par le choix d'une approximation locale constante par morceaux, nous étudions dans la section 3.3 les performances d'une approche Galerkin discontinue d'ordre plus élevé, toujours basée sur des flux centrés.

Le problème modèle auquel nous nous intéressons dans ce chapitre est donné par les équations de Maxwell en régime transitoire qui, en l'absence de sources  $\mathcal{J}_s$  et dans un matériau de conductivité  $\sigma = 0$ , s'écrivent (cf. (1.6))

$$\varepsilon \partial_t \mathcal{E} - \operatorname{curl} \mathcal{H} = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.1a)$$

$$\mu \partial_t \mathcal{H} + \operatorname{curl} \mathcal{E} = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega \times (0, T). \quad (3.1b)$$

Ces équations devront être complétées par des conditions initiales en  $t = 0$ . Les coefficients électromagnétiques  $\varepsilon$  et  $\mu$  vérifient les conditions de positivité de (1.4). Notons que  $\varepsilon$  et  $\mu$  peuvent être des tenseurs, ce qui permet de prendre en compte une anisotropie éventuelle du matériau (cf. [FLLP05]).

Nous considérons une partition  $(\Gamma_D, \Gamma_I)$  du bord  $\Gamma = \partial\Omega$ , sur laquelle nous imposons une condition de conducteur parfait d'une part,

$$\mathcal{E} \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_D \times (0, T), \quad (3.2)$$

et une condition absorbante de type impédance de l'autre,

$$\mathcal{E} \times \mathbf{n} = c\mu(\mathcal{H} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} \text{ sur } \Gamma_I \times (0, T). \quad (3.3)$$

Ici,  $c$  désigne la vitesse locale de la lumière définie par la relation  $\varepsilon\mu c^2 = 1$ , et  $\varepsilon$  et  $\mu$  sont supposés constants au voisinage de  $\Gamma_I$ .

D'après [94], le problème (3.1) est bien posé pour toute donnée initiale  $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0) \in \mathcal{H}(\operatorname{curl}; \Omega) \times \mathcal{H}(\operatorname{curl}; \Omega)$  satisfaisant les conditions aux limites mixtes (3.2) et (3.3).

Pour la discrétisation en espace, nous considérons un maillage non structuré du domaine  $\Omega$  constitué de polyèdres (fermés)  $K_j$ ,  $j \in J \subset \mathbb{N}$ , appelés *volumes finis* ou *cellules*. Pour chaque cellule  $K_j$ , nous désignons par  $|K_j|$  son volume. Le maillage  $\mathcal{T}_h$  satisfait les hypothèses habituelles de conformité, à savoir

1.  $\bar{\Omega} = \cup_{j \in J} K_j$ ,
2. pour tout  $j \neq \ell$ , de deux choses l'une :
  - soit  $K_j \cap K_\ell = \emptyset$ ,
  - soit  $K_j \cap K_\ell$  est une face, une arête ou un sommet de  $K_j$  et de  $K_\ell$ .

Pour deux cellules voisines  $K_j$  et  $K_\ell$ , nous notons  $F_{j\ell} = K_j \cap K_\ell$  la face commune de  $K_j$  et  $K_\ell$  et  $|F_{j\ell}|$  la mesure de sa surface. Le vecteur  $\mathbf{n}_{j\ell}$  est le vecteur unitaire normale à  $F_{j\ell}$  pointant de  $K_j$  vers  $K_\ell$ , tandis que  $N_{j\ell}$  désigne l'intégrale de  $\mathbf{n}_{j\ell}$  sur  $F_{j\ell}$ , autrement dit

$$N_{j\ell} = \mathbf{n}_{j\ell} |F_{j\ell}|. \quad (3.4)$$

Pour  $j \in J$ ,  $\mathcal{N}_j$  désigne l'ensemble des cellules  $K_\ell$  ayant une face commune avec  $K_j$ . Notons  $L = \max_{j \in J} \text{card} \mathcal{N}_j$  le nombre maximal de faces des polyèdres  $K_j$ . Le pas du maillage est défini par  $h = \max_{j \in J} \text{diam} K_j$ . Nous supposons qu'il existe deux constantes  $C_{\min} > 0$  et  $C_{\max} > 0$  de sorte que

$$\begin{aligned} \forall j \in J, \quad C_{\min} h^3 &\leq |K_j| \leq C_{\max} h^3, \text{ et} \\ \forall j \in J, \forall \ell \in \mathcal{N}_j, \quad C_{\min} h^2 &\leq |F_{j\ell}| \leq C_{\max} h^2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Finalement, nous supposons que les paramètres électromagnétiques sont constants sur chaque cellule de sorte que

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon_j, \quad \mu(\mathbf{x}) = \mu_j \text{ pour presque tout } \mathbf{x} \in K_j.$$

## 3.2 Etude du schéma de volumes finis

Nous rappelons dans cette section le schéma de Remaki et discutons ses propriétés sur des maillages non structurés. Comme dans [LR02], nous nous limitons ici à l'étude du cas  $\Omega = \mathbb{R}^3$  et à des conditions initiales  $\mathbf{E}_0$  et  $\mathbf{H}_0$  qui sont à support compact dans  $\mathbb{R}^3$ . La prise en compte des conditions aux limites de type Dirichlet et d'impédance dans le cas général d'un domaine borné est discutée dans [93].

Dans un premier temps, nous écrivons les équations de Maxwell (3.1) sous forme conservative,

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{Q} + \text{div} \mathbb{F}(\mathbf{Q}) = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ \mathbf{Q}(\cdot, 0) = \mathbf{Q}_0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (3.6)$$

où  $\mathbf{Q} = (\mu \mathcal{H}, \varepsilon \mathcal{E})^t = (\mathcal{B}, \mathcal{D})^t$  et la définition  $\mathbb{F}(\mathbf{Q}) = (\mathbf{F}_1(\mathbf{Q}), \mathbf{F}_2(\mathbf{Q}), \mathbf{F}_3(\mathbf{Q}))^t$  découle de (3.1).

Conformément aux principes des schémas volumes finis, nous intégrons la forme conservative (3.6) sur un volume de contrôle ( $K_j$  ici) et appliquons la formule de Green. Pour chaque  $j \in J$ , désignons par  $\mathbf{Q}_j$  l'approximation de la moyenne de  $\mathbf{Q}$  sur  $K_j$ ,

$$\mathbf{Q}_j \approx \frac{1}{|K_j|} \int_{K_j} \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \, dx.$$

Ainsi, nous obtenons la formulation semi-discrète

$$\partial_t \mathbf{Q}_j + \frac{1}{|K_j|} \sum_{\ell \in \mathcal{N}_j} \Phi_{j\ell}(\mathbf{Q}_j, \mathbf{Q}_\ell) = \mathbf{0} \quad (3.7)$$

où  $\Phi_{j\ell}(\mathbf{Q}_j, \mathbf{Q}_\ell)$  est le flux numérique à travers l'interface  $F_{j\ell}$ . Ici, nous choisissons un flux centré,

$$\Phi_{j\ell}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} (\mathbb{F}(\mathbf{U}) + \mathbb{F}(\mathbf{V})) \cdot \mathbf{N}_{j\ell}.$$

La définition de la fonction  $\mathbb{F}$  permet d'écrire le flux numérique comme suit

$$\Phi_{j\ell}(\mathbf{Q}_j, \mathbf{Q}_\ell) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \sum_{\ell \in \mathcal{N}_j} (\mathcal{E}_j + \mathcal{E}_\ell) \times \mathbf{N}_{j\ell} \\ +\frac{1}{2} \sum_{\ell \in \mathcal{N}_j} (\mathcal{H}_j + \mathcal{H}_\ell) \times \mathbf{N}_{j\ell} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \sum_{\ell \in \mathcal{N}_j} \mathcal{E}_\ell \times \mathbf{N}_{j\ell} \\ +\frac{1}{2} \sum_{\ell \in \mathcal{N}_j} \mathcal{H}_\ell \times \mathbf{N}_{j\ell} \end{pmatrix}$$

car

$$\sum_{\ell \in \mathcal{N}_j} \mathbf{N}_{j\ell} = \int_{\partial K_j} \mathbf{n}_{j\ell} \, ds = \int_{K_j} \text{div}(1, 1, 1)^t \, dx = 0.$$

Finalement, nous choisissons un schéma saute-mouton pour la discrétisation en temps qui a l'avantage d'être totalement explicite et non dissipatif. Dans la suite, les inconnues  $\mathbf{E}_j^n$  relatives au

champ électrique sont approchées à des pas de temps entiers  $n\Delta t$  tandis que celles correspondant au champ magnétique seront évaluées à des demi-pas de temps  $(n + \frac{1}{2})\Delta t$  et notées  $\mathbf{H}_j^{n+1/2}$ . La formulation discrète s'écrit alors

$$\begin{cases} \mathbf{H}_j^{n+1/2} &= \mathbf{H}_j^{n-1/2} - \Delta t \mu_j^{-1} (\text{curl}_h \mathbf{E}^n)_j \\ \mathbf{E}_j^{n+1} &= \mathbf{E}_j^n + \Delta t \varepsilon_j^{-1} (\text{curl}_h \mathbf{H}^{n+1/2})_j \end{cases} \quad (3.8)$$

où le rotationnel discret  $\text{curl}_h$  est défini pour  $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_j)_{j \in J}$  par

$$(\text{curl}_h(\mathbf{U}))_j = -\frac{1}{2|K_j|} \sum_{\ell \in \mathcal{N}_j} \mathbf{U}_\ell \times N_{j\ell}. \quad (3.9)$$

Le schéma (3.8) est initialisé par les données  $\mathbf{E}^0 = (\mathbf{E}^0)_{j \in J}$  et  $\mathbf{H}^{-1/2} = (\mathbf{H}^{-1/2})_{j \in J}$  qui constituent une approximation des champs initiaux  $\mathbf{E}_0$  et  $\mathbf{H}_0$ .

Rappelons maintenant les propriétés principales du schéma (3.8) sur des maillages non structurés (cf. [99] pour le cas structuré). Pour cela, nous introduisons un produit scalaire discret,

$$(\mathbf{U}, \mathbf{V})_h \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |K_j| \mathbf{U}_j \cdot \mathbf{V}_j$$

qui est bien défini pour des suites  $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ ,  $\mathbf{V} = (\mathbf{V}_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  dites à *support compact* ayant un nombre fini de termes non nuls.

### Conservation d'une énergie discrète de type saute-mouton

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , définissons  $\mathbb{E}_E^n$  et  $\mathbb{E}_H^n$  par

$$\mathbb{E}_E^n = (\varepsilon \mathbf{E}^{n-1}, \mathbf{E}^n)_h + (\mu \mathbf{H}^{n-1/2}, \mathbf{H}^{n-1/2})_h \quad \text{et} \quad (3.10)$$

$$\mathbb{E}_H^n = (\varepsilon \mathbf{E}^n, \mathbf{E}^n)_h + (\mu \mathbf{H}^{n+1/2}, \mathbf{H}^{n-1/2})_h. \quad (3.11)$$

Alors  $\mathbb{E}_E^n = \mathbb{E}_E^0$  et  $\mathbb{E}_H^n = \mathbb{E}_H^0$  quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ . Il a été démontré dans [93] que  $\mathbb{E}^n$  définit une forme définie positive sous la condition CFL

$$\forall j \in J, \forall \ell \in \mathcal{N}_j, \Delta t^2 \leq 16 \frac{|K_j| |K_\ell|}{P_j P_\ell} \min(\varepsilon_j \mu_\ell, \varepsilon_\ell \mu_j) \quad (3.12)$$

où  $P_j = \sum_{\ell \in \mathcal{N}_j} |F_{j\ell}|$  est la mesure de la surface de la cellule  $K_j$ . Ceci implique la stabilité du schéma (3.8) par rapport à  $\mathbb{E}_E^n$ .

### Résultat de stabilité $L^2$

Définissons à présent une énergie discrète de type  $L^2$  par

$$\mathbb{E}^n = (\varepsilon \mathbf{E}^n, \mathbf{E}^n)_h + (\mu \mathbf{H}^{n-1/2}, \mathbf{H}^{n-1/2})_h. \quad (3.13)$$

Il est évident que  $\mathbb{E}^n$  définit une forme définie positive. La stabilité peut être obtenue sous une condition de type CFL qui dépend des paramètres caractéristiques  $L$ ,  $C_{\min}$  et  $C_{\max}$  du maillage (cf. §3.1). Ainsi, nous avons

$$\mathbb{E}^n \leq \frac{1+r}{1-r} \mathbb{E}^0$$

pourvu que le pas de temps  $\Delta t$  soit choisi de façon à ce que

$$\frac{1}{\lambda} \frac{LC_{\max}}{4C_{\min}} \frac{\Delta t}{h} \leq r < 1. \quad (3.14)$$

Ici,  $\lambda$  est la borne inférieure des paramètres électromagnétiques définies dans (1.4).

La condition CFL globale (3.14) est plus restrictive que la condition locale (3.12) car on remarque que  $P_j \leq LC_{\max} h^2$  et  $|K_j| \geq C_{\min} h^3$  quel que soit  $j \in J$ , et (3.14) implique donc (3.12). Toutefois, le résultat de stabilité par rapport à l'énergie  $\mathbb{E}^n$  garantit la convergence faible dans  $L^2$  des champs discrets  $\mathbf{E}_h$  et  $\mathbf{H}_h$  qui sont définis à partir des suites  $(\mathbf{E}_j^n)_{j \in J}$  et  $(\mathbf{H}_j^{n-1/2})_{j \in J}$ . Le théorème suivant identifie la limite comme solution des équations de Maxwell au sens des distributions si, en plus des hypothèses de régularité habituelles, la famille de maillages satisfait la condition

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( h \sum_{F_{j\ell} \cap B \neq \emptyset} \|\omega_j - 2\sigma_{j\ell} + \omega_\ell\|^2 \right) = 0 \quad (3.15)$$

pour tout domaine borné  $B$  de  $\mathbb{R}^3$ . Ici,  $\omega_j$  (resp.  $\sigma_{j\ell}$ ) désigne le centre de gravité de la cellule  $K_j$  (resp. de la face  $F_{j\ell}$ ).

### Théorème 3.1. [Convergence du schéma]

*Soit  $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$  une famille de maillages non structurés telle que les conditions (3.5) et (3.15) soient satisfaites avec des constantes  $C_{\min}$  et  $C_{\max}$  indépendantes de  $h$ . Soit  $(\mathbf{E}_h, \mathbf{H}_h)_{h>0}$  la suite des champs discrets définis par le schéma (3.8) à partir de données initiales  $\mathbf{E}_0$  et  $\mathbf{H}_0$  régulières.*

*Sous la condition CFL (3.14), une sous-suite de  $(\mathbf{E}_h, \mathbf{H}_h)_{h>0}$  converge faiblement dans  $L^2([0, +\infty[, \mathbb{R}^3)$  vers une solution  $(\mathcal{E}, \mathcal{H})$  des équations de Maxwell (3.1) au sens des distributions. La limite  $(\mathcal{E}, \mathcal{H})$  appartient à  $\mathcal{C}^0([0, +\infty[, L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, +\infty, \mathcal{H}(\text{curl}; \mathbb{R}^3) \times \mathcal{H}(\text{curl}; \mathbb{R}^3))$ .  $\square$*

On peut montrer que sous la condition (3.15), l'énergie discrète  $\mathbb{E}^n$  est conservée à la limite,

$$\mathbb{E}^n = \mathbb{E}^0 + \mathcal{O}(h).$$

Par conséquent, la norme  $L^2$  de  $(\mathbf{H}_h(t, \cdot), \mathbf{E}_h(t, \cdot))$  converge vers la norme de la limite ce qui implique finalement que la convergence des (sous-)suites  $(\mathbf{H}_h, \mathbf{E}_h)_{h>0}$  mentionnée dans le Théorème 3.1 est forte.

Terminons par quelques remarques sur la condition (3.15). Pour un maillage structuré de pavés ou de tétraèdres réguliers, nous avons  $\|\omega_j - 2\sigma_{j\ell} + \omega_\ell\| = 0$  et (3.15) est naturellement vérifiée. Pour un maillage non structuré quelconque,  $\|\omega_j - 2\sigma_{j\ell} + \omega_\ell\| = \mathcal{O}(h)$  tandis que le nombre de cellules dans un domaine borné  $B$  donné est de l'ordre de  $\mathcal{O}(h^{-3})$ . Par conséquent, la quantité  $h \sum_{F_{j\ell} \cap B \neq \emptyset} \|\omega_j - 2\sigma_{j\ell} + \omega_\ell\|^2$  est uniformément borné par rapport à  $h$  sous la seule condition de régularité (3.5). La condition supplémentaire (3.15) exprime alors une certaine homogénéité du maillage. Il est important de noter qu'il s'agit d'une condition *suffisante* qui intervient dans l'analyse de consistance du schéma.

En effet, soit  $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_j)_{j \in J}$  une suite à support compact et  $\mathbf{F} \in (\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3))^3$  un champ test. Soit  $\mathbf{F}^h = (\mathbf{F}(\omega_j))_{j \in J}$  la suite associée au champ  $\mathbf{F}$ . On montre que

$$\begin{aligned} (\text{curl}_h \mathbf{U}, \mathbf{F}^h)_h - (\mathbf{U}, (\text{curl} \mathbf{F})^h)_h &= (\mathbf{U}, \text{curl}_h \mathbf{F}^h - (\text{curl} \mathbf{F})^h)_h \\ &= \sum_{j \in J} \sum_{\ell \in \mathcal{N}_j} (D\mathbf{F}(\sigma_{j\ell})(\omega_j - 2\sigma_{j\ell} + \omega_\ell) \times N_{j\ell}) \cdot \mathbf{U}_j + \mathcal{O}(h). \end{aligned}$$

Sous la condition (3.15), le premier terme du membre à droite tend vers 0 ce qui permet de montrer que le rotationnel discret  $\text{curl}_h$  est une approximation consistante de l'opérateur  $\text{curl}$ .

Le schéma (3.8) a été testé sur différents maillages non structurés générés de façon arbitraire sans tenir compte spécialement de la condition (3.15). Les résultats obtenus sont très satisfaisants (cf. [99, 93]), surtout pour des temps de simulation longs où les schémas décentrés de type MUSCL

deviennent rapidement trop diffusifs. Néanmoins, pour quelques maillages “pathologiques” qui de toute évidence ne satisfont pas l’hypothèse (3.15), l’approximation du champ électromagnétique par le schéma (3.8) est mauvaise ce qui laisse penser que l’homogénéité du maillage joue quand même un certain rôle dans la convergence. En 1D, les Figures 3.1 et 3.2 illustrent ce phénomène. Nous considérons une grille de 200 cellules de longueurs variables  $h_i$ , une condition initiale régulière de type gaussienne ainsi que des conditions périodiques au bord de l’intervalle. Pour chaque grille  $\mathcal{T}_h$  de paramètre  $h = \max h_i$ , on définit sa variation par

$$\text{var}(\mathcal{T}_h) = \sum_{i=1}^N \frac{|h_{i+1} - 2h_i + h_{i-1}|^2}{h_i}.$$

La condition (3.15) s’écrit alors  $\lim_{h \rightarrow 0} \text{var}(\mathcal{T}_h) = 0$ . La Figure 3.1 compare les simulations à  $t = 0$  et  $t = 0.6$  pour une grille régulière (graphique de gauche) pour laquelle  $h_i = h$  et donc  $\text{var}(\mathcal{T}_h) = 0$ , et une grille alternée (graphique de droite) pour laquelle  $h_{2i-1} = h$  et  $h_{2i} = 2h$  de sorte que  $\text{var}(\mathcal{T}_h) = 2$ . On voit clairement que la grille alternée ne permet pas une approximation satisfaisante de la pulsation initiale. La Figure 3.2 illustre le fait que la qualité de l’approximation semble dépendre en effet de la variation de la grille : plus la variation est grande, plus l’approximation montre des oscillations parasites.

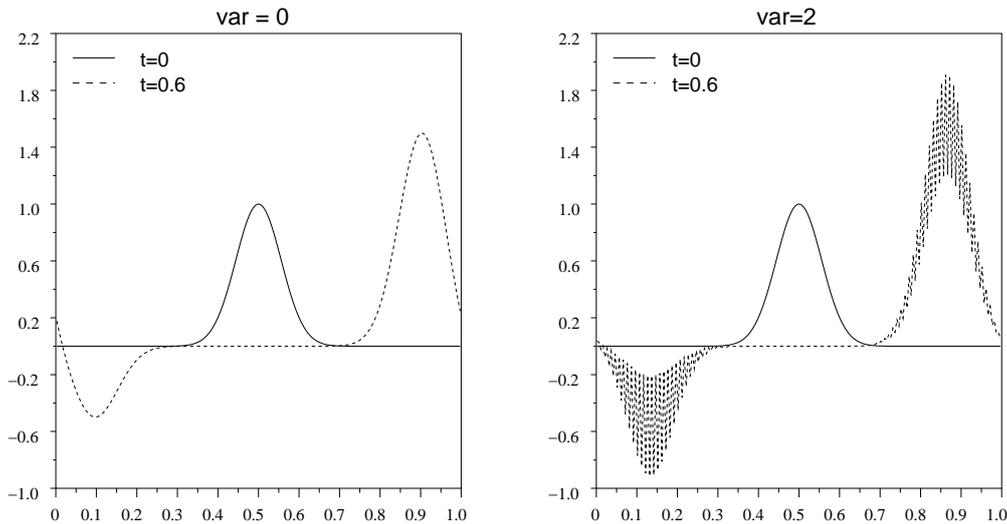


FIGURE 3.1 – Approximation par schéma VF avec flux centré sur grille régulière (gauche) et alternée (droite).

### 3.3 Etude de la méthode de Galerkin discontinue

De par la nature de l’approche Volumes Finis qui est basée sur une approximation locale constante des champs, la convergence du schéma (3.8) est relativement lente. Les méthodes de Galerkin discontinues apparaissent alors comme une généralisation des schémas Volumes Finis permettant d’obtenir des méthodes d’ordre élevé grâce au choix de l’espace d’approximation locale qui contient maintenant des polynômes de degré supérieur.

Les travaux présentés dans [FLLP05] dont nous résumons ici les résultats principaux, généralisent en ce sens le schéma de Remaki (3.8).

Soit alors  $\mathcal{T}_h = \{K_j \mid j \in J\}$  un maillage de polyèdres du domaine  $\Omega$ . Nous supposons que  $\mathcal{T}_h$  satisfait les hypothèses de la section 3.1. A chaque cellule  $K_j$ , nous associons un espace vectoriel  $\mathcal{P}_j$  de dimension finie  $d_j$  engendré par des champs de vecteurs  $(\varphi_{j\ell})_{1 \leq \ell \leq d_j}$  définis sur  $K_j$ . Les

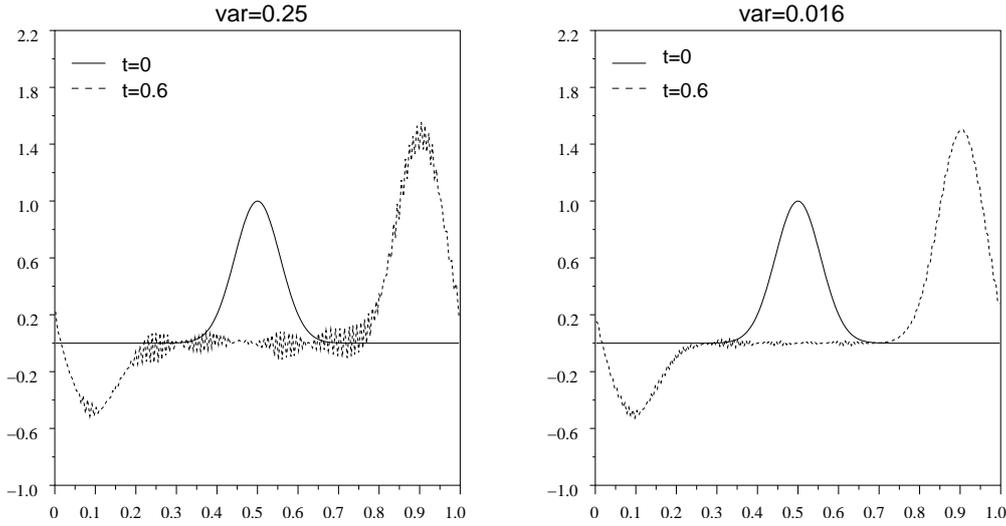


FIGURE 3.2 – Approximation par schéma VF avec flux centré sur grilles non-structurées de variations différentes.

champs semi-discrets  $(\mathcal{E}_h, \mathcal{H}_h)$  appartiennent alors localement à  $\mathcal{P}_j$  : quel que soit  $t$ ,

$$\mathcal{E}_j(\cdot, t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{E}_h|_{K_j} \in \mathcal{P}_j, \quad \forall j \quad (3.16a)$$

$$\mathcal{H}_j(\cdot, t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{H}_h|_{K_j} \in \mathcal{P}_j, \quad \forall j, \quad (3.16b)$$

et peuvent présenter des discontinuités à travers les interfaces  $F_{j\ell}$  des cellules. Pour un champ  $\mathbf{U}_h$  discontinu, nous notons  $\{\mathbf{U}_h\}_{j\ell}$  sa moyenne sur toute interface  $F_{j\ell}$  intérieure :

$$\{\mathbf{U}_h\}_{j\ell} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{U}_j|_{F_{j\ell}} + \mathbf{U}_\ell|_{F_{j\ell}} \right).$$

Nous supposons que l'on dispose des estimations inverses suivantes pour les éléments de  $\mathcal{P}_j$  : pour tout  $j \in J$ , il existe des constantes  $\alpha_j > 0$  et  $\beta_{j\ell} > 0, \ell \in \mathcal{N}_j$  indépendantes du paramètre  $h$  du maillage telles que pour tout  $\varphi \in \mathcal{P}_j$ ,

$$\|\text{curl } \varphi\|_{0, K_j} \leq \frac{\alpha_j P_j}{|K_j|} \|\varphi\|_{0, K_j}, \quad \text{et} \quad (3.17a)$$

$$\|\varphi\|_{0, F_{j\ell}} \leq \frac{\beta_{j\ell} |F_{j\ell}|}{|K_j|} \|\varphi\|_{0, K_j} \quad \forall \ell \in \mathcal{N}_j. \quad (3.17b)$$

De telles estimations existent par exemples pour les espaces  $\mathbb{P}_k(K_j)$  des polynômes de degré  $\leq k$ .

Pour la discrétisation en espace, nous multiplions les équations de Maxwell (3.1) par un champ test  $\varphi$  et intégrons les équations sur une cellule  $K_j$ . Par les formules de Green, nous obtenons

$$\begin{cases} \int_{K_j} \varepsilon_j \partial_t \mathcal{E} \cdot \varphi \, dx &= - \int_{\partial K_j} (\mathcal{H} \times \mathbf{n}) \cdot \varphi \, ds + \int_{K_j} \mathcal{H} \cdot \text{curl } \varphi \, dx, \\ \int_{K_j} \mu_j \partial_t \mathcal{H} \cdot \varphi \, dx &= \int_{\partial K_j} (\mathcal{E} \times \mathbf{n}) \cdot \varphi \, ds - \int_{K_j} \mathcal{E} \cdot \text{curl } \varphi \, dx. \end{cases} \quad (3.18)$$

Comme pour le schéma Volumes Finis de la section précédente, nous choisissons un flux centré pour approcher le “flux” de  $\mathcal{H}$  (resp.  $\mathcal{E}$ ) à travers les faces  $F_{j\ell}$  de  $K_j$  :

$$\forall j \in J, \forall \ell \in \mathcal{N}_j, \quad \mathcal{E}|_{F_{j\ell}} \approx \{\mathcal{E}_h\}_{j\ell}, \quad \mathcal{H}|_{F_{j\ell}} \approx \{\mathcal{H}_h\}_{j\ell}.$$

Pour la discrétisation en temps, nous prenons à nouveau un schéma saute-mouton. Nous notons  $\mathbf{E}_j^n$  les inconnues associées au champ électrique à l'instant  $t_n = n\Delta t$  et  $\mathbf{H}_j^{n-1/2}$  les inconnues associées au champ magnétique à l'instant  $t_{n-1/2} = (n - \frac{1}{2})\Delta t$  pour un pas de temps  $\Delta t > 0$ .

Le problème discret consiste alors à trouver pour  $\mathbf{E}_h^n = (\mathbf{E}_j^n)_{j \in J}$  et  $\mathbf{H}_h^{n-1/2} = (\mathbf{H}_j^{n-1/2})_{j \in J}$  donnés,  $(\mathbf{E}_j^n, \mathbf{H}_j^{n+1/2})$  dans  $\mathcal{P}_j \times \mathcal{P}_j$  tels que pour tout  $\varphi \in \mathcal{P}_j$ ,

$$\begin{cases} \int_{K_j} \varepsilon_j \frac{\mathbf{E}_j^n - \mathbf{E}_j^{n-1}}{\Delta t} \cdot \varphi \, dx = - \sum_{\ell \in \mathcal{N}_j} \int_{F_{j\ell}} \left( \{ \mathbf{H}_h^{n-1/2} \}_{j\ell} \times \mathbf{n}_{j\ell} \right) \cdot \varphi \, ds + \int_{K_j} \mathbf{H}_j^{n-1/2} \cdot \text{curl } \varphi \, dx, \\ \int_{K_j} \mu_j \frac{\mathbf{H}_j^{n+1/2} - \mathbf{H}_j^{n-1/2}}{\Delta t} \cdot \varphi \, dx = \sum_{\ell \in \mathcal{N}_j} \int_{F_{j\ell}} \left( \{ \mathbf{E}_h^n \}_{j\ell} \times \mathbf{n}_{j\ell} \right) \cdot \varphi \, ds - \int_{K_j} \mathbf{E}_j^n \cdot \text{curl } \varphi \, dx. \end{cases} \quad (3.19)$$

On peut noter que dans le cas où  $\mathcal{P}_j$  coïncide avec l'espace des constantes  $\mathbb{P}_0(K_j)$ , nous retrouvons le schéma de Volumes Finis de la section 3.2.

Afin d'écrire le problème (3.19) sous forme matricielle, décomposons les champs  $\mathbf{E}_j^{n-1}$  et  $\mathbf{H}_j^{n-1/2}$  sur la base  $(\varphi_{jk})_k$  de l'espace  $\mathcal{P}_j$ ,

$$\forall \mathbf{x} \in K_j, \mathbf{E}_j^{n-1} = \sum_{k=1}^{d_j} E_{jk}^{n-1} \varphi_{jk}, \quad \mathbf{H}_j^{n-1/2} = \sum_{k=1}^{d_j} H_{jk}^{n-1/2} \varphi_{jk}.$$

Si  $\vec{E}_j^n$  (resp.  $\vec{H}_j^{n-1/2}$ ) désigne le vecteur (colonne) de  $\mathbb{R}^{d_j}$  des coefficients  $E_{jk}^n$  (resp.  $H_{jk}^{n-1/2}$ ), (3.19) s'écrit pour chaque  $j$  sous la forme de deux systèmes linéaires dans  $\mathbb{R}^{d_j}$  :

$$\begin{cases} \left[ \mathbb{M}_j^\varepsilon \frac{\vec{E}_j^n - \vec{E}_j^{n-1}}{\Delta t} \right]_k = - \sum_{\ell \in \mathcal{N}_j} \int_{F_{j\ell}} \left( \{ \vec{H}_h^{n-1/2} \}_{j\ell} \times \mathbf{n}_{j\ell} \right) \cdot \varphi_{jk} \, ds + \int_{K_j} \vec{H}_j^{n-1/2} \cdot \text{curl } \varphi_{jk} \, dx, \\ \left[ \mathbb{M}_j^\mu \frac{\vec{H}_j^{n+1/2} - \vec{H}_j^{n-1/2}}{\Delta t} \right]_k = \sum_{\ell \in \mathcal{N}_j} \int_{F_{j\ell}} \left( \{ \vec{E}_h^n \}_{j\ell} \times \mathbf{n}_{j\ell} \right) \cdot \varphi_{jk} \, ds - \int_{K_j} \vec{E}_j^n \cdot \text{curl } \varphi_{jk} \, dx. \end{cases} \quad (3.20)$$

Les matrices de masse locales  $\mathbb{M}_j^\varepsilon$  et  $\mathbb{M}_j^\mu$  de  $\mathcal{M}_{d_j}(\mathbb{R})$  sont définies par

$$(\mathbb{M}_j^\varepsilon)_{k\ell} = \int_{K_j} \varepsilon_j \varphi_{j\ell} \cdot \varphi_{jk} \, dx, \quad 1 \leq k, \ell \leq d_j, \quad (3.21a)$$

$$(\mathbb{M}_j^\mu)_{k\ell} = \int_{K_j} \mu_j \varphi_{j\ell} \cdot \varphi_{jk} \, dx, \quad 1 \leq k, \ell \leq d_j. \quad (3.21b)$$

Les hypothèses sur les coefficients  $\varepsilon$  et  $\mu$  impliquent que les matrices  $\mathbb{M}_j^\varepsilon$  et  $\mathbb{M}_j^\mu$  sont symétriques définies positives. L'implémentation du schéma (3.20) nécessite alors seulement l'inversion de matrices de masses locales en plus du calcul des flux numériques.

Pour la prise en compte des conditions aux limites, on utilise le principe des cellules fictives. Ainsi, la face d'une cellule  $K_j$  contenue dans le bord de  $\Omega$  sera notée  $F_{j\ell}$  et considérée comme l'interface entre  $K_j$  et une cellule fictive  $K_\ell$ . Il convient alors de définir la valeur des champs approchés  $\mathbf{E}_\ell^{n-1}$  et  $\mathbf{H}_\ell^{n-1/2}$  sur les cellules fictives.

Pour une condition de type conducteur parfait, nous définissons

$$\begin{cases} (\mathbf{E}_\ell^{n-1})_{|F_{j\ell}} &= - (\mathbf{E}_j^{n-1})_{|F_{j\ell}}, \\ (\mathbf{H}_\ell^{n-1/2})_{|F_{j\ell}} &= (\mathbf{H}_j^{n-1/2})_{|F_{j\ell}}, \end{cases} \quad (3.22)$$

ce qui conduit à des flux numériques  $\{\mathbf{E}^{n-1}\}_{j\ell} = 0$  et  $\{\mathbf{H}^{n-1/2}\}_{j\ell} = \mathbf{H}_\ell^{n-1/2}$  conformément à la condition exacte  $\mathcal{E} \times \mathbf{n} = 0$ .

La prise en compte de la condition absorbante sur  $\Gamma_I$  est plus technique. Nous renvoyons à notre papier [FLLP05] pour les détails, et supposons pour la suite de ce paragraphe que  $\Gamma_I = \emptyset$ .

Afin de montrer que le schéma (3.19) est stable, nous introduisons comme dans le cas  $\mathbb{P}_0$  une énergie discrète de type saute-mouton :  $\mathbb{E}^n = \sum_{j \in J} \mathbb{E}_j^n$  où l'énergie "locale"  $\mathbb{E}_j^n$  est définie sur  $K_j$  par

$$\mathbb{E}_j^n = \int_{K_j} \left( \varepsilon_j \mathbf{E}_j^n \cdot \mathbf{E}_j^n + \mu_j \mathbf{H}_j^{n-1/2} \cdot \mathbf{H}_j^{n+1/2} \right) dx. \quad (3.23)$$

**Conservation de l'énergie discrète :** Sous l'hypothèse que la seule condition aux limites est celle d'un conducteur parfait ( $\Gamma_I = \emptyset$ ), l'énergie discrète  $\mathbb{E}^n$  définie par (3.23) est conservée de façon exacte par le schéma (3.19), c'est-à-dire  $\mathbb{E}^n = \mathbb{E}^0$  quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ .

En présence d'une condition absorbante, on peut définir une énergie discrète modifiée  $\tilde{\mathbb{E}}^n$  qui est non croissante :  $\tilde{\mathbb{E}}^{n+1} - \tilde{\mathbb{E}}^n \leq 0$ .

**Stabilité du schéma :** Sous la condition de type CFL

$$\forall j \in J, \forall \ell \in \mathcal{N}_h, c_j \Delta t \left( 2\alpha_j + \beta_{j\ell} \max\left(\sqrt{\frac{\mu_j}{\mu_\ell}}, \sqrt{\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_\ell}}\right) \right) \leq \frac{4|K_j|}{P_j}, \quad (3.24)$$

l'énergie discrète (3.23) définit une forme quadratique définie positive des inconnues ( $\mathbf{E}_j^n$ ) et ( $\mathbf{H}_j^{n-1/2}$ ). La condition (3.24) dépend de la vitesse de propagation  $c_j = 1/\sqrt{\varepsilon_j \mu_j}$ , du rapport des coefficients électromagnétiques sur  $K_j$  et  $K_\ell$  ainsi que du choix de l'espace d'approximation locale  $\mathcal{P}_j$ . Le membre de droite de (3.24) a la dimension d'une longueur ( $P_j$  mesure la surface de  $K_j$ ) et donne une approximation du diamètre  $h_j$  de la cellule  $K_j$ .

**Convergence du schéma semi-discret :** Pour établir un ordre de convergence de la méthode de Galerkin discontinue, il convient de fixer à présent les espaces d'approximation locale  $\mathcal{P}_j$ . Ici, nous étudions une méthode  $\mathbb{P}_k$ -DGTD pour laquelle le maillage est constitué de tétraèdres et  $\mathcal{P}_j$  est l'espace de polynômes de degré inférieur ou égal à  $k$ . Tenant compte de la seule discrétisation en espace, le problème semi-discret est posé sur l'espace

$$V_h^{\text{DG}} = \left\{ \mathbf{v}_h \in \mathbf{L}^2(\Omega) \mid \mathbf{v}_h|_{K_j} \in \mathbb{P}_k(K_j) \right\}$$

et consiste à trouver  $\mathcal{Q}_h(\cdot, t) = (\mathcal{E}_h(\cdot, t), \mathcal{H}_h(\cdot, t)) \in V_h^{\text{DG}} \times V_h^{\text{DG}}$  tels que

$$m(\partial_t \mathcal{Q}_h, \mathcal{Q}') + a(\mathcal{Q}_h, \mathcal{Q}') + b(\mathcal{Q}_h, \mathcal{Q}') = 0, \quad \forall \mathcal{Q}' \in V_h^{\text{DG}} \times V_h^{\text{DG}}. \quad (3.25)$$

Les formes bilinéaires  $m(\cdot, \cdot)$ ,  $a(\cdot, \cdot)$  et  $b(\cdot, \cdot)$  sont obtenues par sommation sur toutes les cellules  $K_j$  et sont définies pour  $\mathcal{Q}_h = (\mathbf{U}_h, \mathbf{V}_h)$  et  $\mathcal{Q}'_h = (\mathbf{U}'_h, \mathbf{V}'_h)$  dans  $V_h^{\text{DG}}$  par

$$m(\mathcal{Q}_h, \mathcal{Q}'_h) = \int_{\Omega} (\varepsilon \mathbf{U}_h \cdot \mathbf{U}'_h + \mu \mathbf{V}_h \cdot \mathbf{V}'_h) dx, \quad (3.26a)$$

$$a(\mathcal{Q}_h, \mathcal{Q}'_h) = \sum_{j \in J} \int_{K_j} (\mathbf{U}_j \cdot \text{curl } \mathbf{V}'_j - \mathbf{V}_j \cdot \text{curl } \mathbf{U}'_j) dx, \quad (3.26b)$$

$$b(\mathcal{Q}_h, \mathcal{Q}'_h) = \sum_{F_{j\ell}} \int_{F_{j\ell}} \left( \{\mathbf{V}\}_{j\ell} [[\mathbf{U}]]_{j\ell} - \{\mathbf{U}\}_{j\ell} [[\mathbf{V}]]_{j\ell} \right) ds. \quad (3.26c)$$

Ici, le saut  $[[\mathbf{U}]]_T$  de la composante tangentielle d'un champ  $\mathbf{U} \in V_h^{\text{DG}}$  à travers l'interface  $F_{j\ell}$  est défini par

$$[[\mathbf{U}]]_{j\ell} = \left( \mathbf{U}_\ell|_{F_{j\ell}} - \mathbf{U}_j|_{F_{j\ell}} \right) \times \mathbf{n}_{j\ell}.$$

Alors, nous avons le résultat de convergence suivant

**Théorème 3.2. [Convergence du schéma semi-discret]**

Soit  $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$  une famille régulière de maillages non-structurés satisfaisant la condition d'homogénéité

$$\forall h, \forall K_j, \forall \ell \in \mathcal{N}_j, \frac{h_i}{h_\ell} \leq \eta \quad (3.27)$$

avec une constante  $\eta > 0$  indépendante de  $h$ .

Soit  $(\mathcal{E}, \mathcal{H})$  la solution exacte des équations de Maxwell (3.1) et soit  $(\mathcal{E}_h, \mathcal{H}_h)$  la solution semi-discrète de (3.25) avec  $\mathcal{P}_j = \mathbb{P}_k(K_j)$  quel que soit  $j$ . Supposons par ailleurs que  $(\mathcal{E}, \mathcal{H})$  appartient à l'espace  $C^0([0, T], \mathbf{PH}^{s+1}(\Omega; \mathcal{P}))$  pour  $s > 0$ , alors

$$\max_{t \in [0, T]} \|\mathbf{q}_h(t)\|_{0, \Omega} \lesssim Th^{\min(s, k)} \|(\mathcal{E}, \mathcal{H})\|_{C^0([0, T], \mathbf{PH}^{s+1}(\Omega; \mathcal{P}))}. \quad (3.28)$$

où  $\mathbf{q}_h = (\mathcal{E} - \mathcal{E}_h, \mathcal{H} - \mathcal{H}_h)$  désigne l'erreur de discrétisation. □

Le schéma saute-mouton étant d'ordre 2 en temps, l'erreur totale est de l'ordre de

$$\mathcal{O}(Th^{\min(s, k)}) + \mathcal{O}(\Delta t^2).$$

**La contrainte de la divergence :** La solution des équations de Maxwell (3.1) reste à divergence nulle au cours du temps pourvu que les conditions initiale  $\mathbf{E}_0$  et  $\mathbf{H}_0$  le soient. Au niveau discret, cette relation ne peut être satisfaite de façon exacte. Néanmoins, nous pouvons montrer que les champs discrets vérifient la contrainte de divergence nulle dans un sens faible. Considérons pour cela l'espace de discrétisation des éléments finis de Lagrange d'ordre  $k + 1$  conforme dans  $H_0^1(\Omega)$  (cf. (1.35)) :

$$S_h^{k+1} = \left\{ p_h \in H_0^1(\Omega) \mid p_h|_{K_j} \in \mathbb{P}_{k+1}(K_j) \right\}.$$

Soient  $\mathbf{E}_h^n$  et  $\mathbf{H}_h^{n+1/2}$  les champs discrets obtenus par le schéma (3.19). Alors

$$(\varepsilon \mathbf{E}_h^n, \nabla p_h) = (\varepsilon \mathbf{E}_h^{n-1}, \nabla p_h) \text{ et } (\mu \mathbf{H}_h^{n+1/2}, \nabla p_h) = (\mu \mathbf{H}_h^{n-1/2}, \nabla p_h) \quad \forall p_h \in S_h^{k+1}. \quad (3.29)$$

Par conséquent, dès lors que les champs  $\mathbf{E}_0$  et  $\mathbf{H}_0$  sont à divergence nulle, les champs discrets  $\mathbf{E}_h^n$  et  $\mathbf{H}_h^{n+1/2}$  sont à divergence discrète nulle au sens de (3.29) si on définit  $\mathbf{E}_h^0$  (resp.  $\mathbf{H}_h^{1/2}$ ) par projection de  $\mathbf{E}_0$  (resp. de  $\mathbf{H}_0$ ) sur  $V_h^{\text{DG}}$ .

La méthode a été implémentée à INRIA Sophia-Antipolis pour des géométries 3D dans une version  $\mathbb{P}_0$ -DGDT et  $\mathbb{P}_1$ -DGDT sur des maillages tétraédriques. Notons que la version  $\mathbb{P}_0$ -DGDT coïncide avec l'approche Volumes Finis développée dans la section 3.2. Les tests numériques comprennent des études dans des cavités métalliques (calcul de résonances) ainsi que des problèmes de diffraction par une sphère ou un avion. Nous renvoyons à [FLLP05] pour les graphiques. Les résultats obtenus avec une version  $\mathbb{P}_1$ -DGDT parallélisée montrent clairement le gain en précision par rapport à une approche Volumes Finis.

### 3.4 Conclusion

Nous avons vu que l'utilisation d'un schéma de type Galerkin discontinu basé sur des flux centrés permet la simulation du champ électromagnétique sur des temps longs sans perte d'énergie tout en gardant la flexibilité dans le choix des espaces d'approximation locale. Le développement de ce type de méthodes d'ordre élevé continue à être un axe de recherche important comme le témoignent les nombreuses publications postérieures aux nôtres (cf. par exemple [20, 53, 50]). Dans leur version parallélisée, ces méthodes sont capables de traiter des configurations réalistes telle que par exemple la diffraction d'ondes électromagnétiques par un avion pour la détection radar.

## Chapitre 4

# Méthode des éléments finis d'arête étendus

Ce chapitre fait référence aux publications

- [LLN11] F. LEFÈVRE, S. LOHRENGEL ET S. NICAISE, An extended finite element method for 2D edge elements, *Int. J. Numer. Anal. Model.* **8** (2011), pp. 641–666.
- [BLL12] J.-C. BOISSON, F. LEFÈVRE ET S. LOHRENGEL, Crack identification in electromagnetic testing using genetic algorithms based on extended finite edge elements, *European congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2012)*, e-Book Full Papers, pp. 917–935.
- [LN14] S. LOHRENGEL ET S. NICAISE, Analysis of eddy current formulations in two-dimensional domains with cracks, *accepté dans M2AN*.

en collaboration avec des collègues mathématiciens (F. Lefèvre (LMR, Université de Reims) et S. Nicaise (LAMAV, Université de Valenciennes)) et informaticiens (J.-C. Boisson (CReSTIC, Université de Reims)). Le projet de l'identification de fissures par ondes électromagnétiques a bénéficié en 2011 du support financier de l'Université de Reims-Champagne Ardenne (Projet DENUSEL) dans le cadre du dispositif BQR (Bonus Qualité Recherche).

### 4.1 Introduction

Dans nos travaux antérieurs sur la prise en compte des singularités géométriques (Chapitre 2), le domaine de calcul en considération était supposé de régularité au moins lipschitzienne ce qui exclut les domaines contenant des fissures. Si les techniques développées (méthode du champ singulier, méthode de régularisation à poids ou raffinement de maillage) se généralisent sans trop de difficulté aux domaines fissurés, nous présentons dans ce chapitre une idée différente, à savoir la méthode des éléments finis étendus (eXtended Finite Element Method (XFEM) en anglais).

La méthode des éléments finis étendus a été introduite par Moës, Dolbow et Belytschko pour un problème de propagation de fissures dans le cadre de l'élasticité linéaire [82]. Dans une simulation basée sur les éléments finis classiques, la propagation de la fissure nécessite le remaillage du domaine fissuré à chaque pas de temps ce qui est extrêmement coûteux. L'idée des éléments finis étendus consiste à mailler uniquement le domaine non fissuré tandis que la discontinuité du champ de déplacement à travers la fissure ainsi que le comportement singulier au fond de fissure sont pris en compte explicitement dans l'espace de discrétisation. La coûteuse étape de remaillage au cours de la simulation peut alors être évitée. Les méthodes XFEM connaissent un grand succès dans le domaine de la mécanique et de nombreuses variantes de la méthode originale ont vu le jour [19, 30, 31, 33, 70].

En électromagnétisme, la simulation des champs dans un domaine fissuré intervient principalement dans la modélisation des dispositifs de contrôle non destructif (CND). Le CND est

un ensemble de méthodes permettant de caractériser l'état de santé d'une structure ou d'un matériau sans le détériorer. Parmi les différentes techniques existantes, on trouve les méthodes basées sur les ondes mécaniques (contrôle par ultrasons), mais la majorité utilise les ondes électromagnétiques : contrôle par rayons X, par thermographie infrarouge ou encore par courants de Foucault. Si les méthodes actuelles sont capables de *détecter* la présence de fissures, elles ne sont pas toujours fiables dans leur identification et localisation précises. Or, de telles informations sont primordiales pour former un diagnostic en vue d'une prévention des risques que ce soit dans le secteur aéronautique, le secteur nucléaire ou encore le secteur du bâtiment.

Le principe du contrôle non destructif repose sur le fait qu'un défaut dans la pièce à contrôler conduit à une réponse mesurable. Dans le cas du CND par courants de Foucault, par exemple, la présence d'une fissure modifie l'impédance de la bobine excitatrice/réceptrice. La mesure de cette variation d'impédance permet ensuite de détecter et, éventuellement, de localiser la fissure.

Mathématiquement, les méthodes de contrôle non destructif rentrent dans la classe des problèmes inverses : à partir de mesures prises sur l'objet à contrôler, on cherche le défaut, en l'occurrence la fissure, qui est à l'origine de ces mesures. Pour cela, on minimise une fonctionnelle (*fonction coût*) qui quantifie l'adéquation d'une fissure quelconque aux mesures. Il existe essentiellement deux catégories de méthodes permettant la résolution numérique du problème direct sous-jacent. La première, qualifiée de *semi-analytique*, est basée sur la connaissance d'une fonction de Green pour définir une équation intégrale sur le défaut (cf. par exemple [23, 26]). Cette équation intégrale permet ensuite d'établir un lien direct entre les mesures et la fissure. La méthode présente l'avantage de réduire le domaine de calcul à la seule fissure qui est une variété de dimension  $n - 1$ . Elle est par contre limitée à des configurations simples (demi-espace, milieu homogène) pour lesquelles une fonction de Green est connue.

La deuxième catégorie regroupe les méthodes entièrement numériques qui nécessitent la simulation du champ électromagnétique dans toute la pièce à contrôler [35, 34]. Ainsi, chaque évaluation de la fonction coût équivaut à la résolution numérique du problème direct sur un domaine de calcul qui dépend de la géométrie de la fissure candidate. Les méthodes de discrétisation classiques sont basées sur des maillages conformes à la géométrie. Il serait alors nécessaire de remailler le domaine à chaque évaluation ce qui rendrait le coût de la méthode prohibitif. Pour cette raison, nous avons développé une méthode d'éléments finis étendus pour les équations de Maxwell qui permet de travailler avec un seul maillage du domaine non fissuré.

Dans la section 4.2, nous présentons les principes de la méthode XFEM-arêtes dans le cadre des équations de Maxwell harmoniques en champ électrique dans un matériau homogène de conductivité non nulle. Nous montrons qu'il s'agit d'une méthode conforme qui est d'ordre  $1/2$  au moins. Nous abordons également l'implémentation de la méthode et montrons des résultats numériques. Le paragraphe 4.3 est consacré à la problématique de l'identification d'une fissure à partir de mesures prises sur le domaine endommagé. Pour la résolution du problème d'optimisation sous-jacent, nous avons mis en place un algorithme génétique. Finalement, nous adressons dans la section 4.4 le modèle des courants de Foucault qui permet de prendre en compte une configuration réaliste d'un dispositif de contrôle non destructif.

## 4.2 Éléments finis d'arête étendus

### 4.2.1 Géométrie du domaine fissuré et résultats de régularité

Pour préciser la géométrie du domaine de calcul qui nous intéresse dans cette section, considérons un polygone convexe  $Q \subset \mathbb{R}^2$  de bord  $\Gamma$ .  $Q$  modélise la structure sans défaut. La fissure est représentée de façon idéalisée par un segment fermé  $\Sigma = \{s\mathbf{x}^* + (1-s)\mathbf{x}_0 \mid s \in [0, 1]\}$  dans  $\bar{Q}$ . Nous nous limitons au cas d'une fissure débouchante ce qui signifie que l'une des extrémités de  $\Sigma$ , en l'occurrence  $\mathbf{x}_0$ , est située sur le bord  $\Gamma$  tandis que le fond de fissure  $\mathbf{x}^*$  appartient à l'ouvert  $Q$ . Dans la suite, nous notons  $\Omega$  le domaine fissuré :  $\Omega = Q \setminus \Sigma$ .

Nous supposons que le matériau occupant  $Q$  est homogène, de conductivité non nulle et entouré d'un conducteur parfait. Reprenant la formulation des équations de Maxwell en régime harmonique dans la configuration transverse électrique (1.12), nous cherchons le champ électrique  $\mathbf{E} \in \mathcal{H}_{0,\Gamma}(\text{curl}; \Omega)$  tel que

$$(\mu^{-1} \text{curl } \mathbf{E}, \text{curl } \mathbf{F}) - \omega^2(\varepsilon_\sigma \mathbf{E}, \mathbf{F}) = i\omega(\mathbf{J}_s, \mathbf{F}) \quad \forall \mathbf{F} \in \mathcal{H}_{0,\Gamma}(\text{curl}; \Omega). \quad (4.1)$$

Puisque  $\varepsilon_\sigma = \varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega}$  avec  $\sigma > 0$  sur  $Q$ , la forme sesquilinéaire du problème (4.1) est coercive sur  $\mathcal{H}_{0,\Gamma}(\text{curl}; \Omega)$  ce qui rend le problème bien posé. Dans la suite, nous supposons que la source  $\mathbf{J}_s$  est à divergence nulle dans  $Q$  et à support dans  $\Omega$ . On montre alors en prenant des champs tests sous forme de gradients que  $\text{div } \mathbf{E} = 0$  dans  $\Omega$  et  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_\Sigma = 0$  sur  $\Sigma$ . Notons que la condition aux limites  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_\Sigma = 0$  n'est pas contenue dans l'espace fonctionnel de la formulation. Elle exprime le fait qu'aucun courant ne peut passer à travers la fissure. Par conséquent, les lignes de courant contournent la fissure et la composante tangentielle de  $\mathbf{E}$  est en général discontinue.

La méthode des éléments finis étendus nécessite une connaissance précise du comportement des champs au voisinage de la fissure. Au voisinage du fond de fissure  $\mathbf{x}^*$ , ce comportement se décrit en variables locales  $(r^*, \theta^*)$  au moyen de la fonction singulière

$$S_1(r^*, \theta^*) = \eta^*(r^*)r^{1/2} \sin\left(\frac{\theta^*}{2}\right).$$

Ici, le demi-axe  $\theta^* = 0$  correspond au prolongement dans  $\Omega$  de la fissure dans la direction de  $\tau_\Sigma$  de sorte que  $\Sigma$  est donnée respectivement par  $\theta^* = \pi$  d'un côté et  $\theta^* = -\pi$  de l'autre. A l'embouchure  $\mathbf{x}_0$ , le comportement singulier du champ électrique relève de la singularité d'un problème scalaire avec conditions aux limites mixtes. Remarquons qu'en présence de conditions mixtes, le champ développe une singularité forte uniquement si l'angle que forment les segments porteurs des conditions mixtes est supérieur à  $\frac{\pi}{2}$ . Plus précisément, notons  $\Omega^+$  (resp.  $\Omega^-$ ) le sous-domaine de  $\Omega$  situé "au-dessus" (resp. "en dessous") de la fissure :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in \Omega^+ & \quad \text{si } \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}_\Sigma > 0, \\ \mathbf{x} \in \Omega^- & \quad \text{si } \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}_\Sigma < 0. \end{aligned}$$

Alors, si l'angle  $\omega^+$  entre  $\Sigma$  et  $\Gamma \cap \Omega^+$  est supérieur à  $\frac{\pi}{2}$ , nous définissons la fonction singulière

$$S_2(r_0, \theta_0) = \begin{cases} \eta_0(r_0)r_0^{\lambda^+} \sin(\lambda^+\theta_0) & \text{dans } \Omega^+, \\ 0 & \text{dans } \Omega^-, \end{cases}$$

avec  $\lambda^+ = \frac{\omega^+}{2\pi}$ . Si au contraire  $\omega^- > \frac{\pi}{2}$ , nous avons

$$S_2(r_0, \theta_0) = \begin{cases} 0 & \text{dans } \Omega^+, \\ \eta_0(r_0)r_0^{\lambda^-} \sin(\lambda^-\theta_0) & \text{dans } \Omega^-, \end{cases}$$

avec  $\lambda^- = \frac{\omega^-}{2\pi}$ . Notons que pour simplifier la présentation, nous avons supposé que le domaine  $Q$  est convexe de sorte que dans tous les cas  $\omega^+$  ou  $\omega^-$  est inférieur à  $\frac{\pi}{2}$ .

Nous pouvons alors établir le théorème de décomposition suivant

**Théorème 4.1. [Théorème de décomposition]**

*Tout champ  $\mathbf{E} \in \mathcal{H}_{0,\Gamma}(\text{curl}; \Omega) \cap \mathcal{H}_{0,\Sigma}(\text{div}; \Omega)$  admet une décomposition en une partie régulière et une partie singulière qui s'écrit sous forme d'un gradient : il existe  $\mathbf{E}_r \in \mathbf{H}^1(\Omega)$  telle que  $\mathbf{E}_r \times \mathbf{n} = 0$  sur  $\Gamma$  et  $\mathbf{E}_r \cdot \mathbf{n}_\Sigma = 0$  sur  $\Sigma$  et  $c_\alpha \in \mathbb{C}$  ( $\alpha \in \mathcal{I}$ ), tels que*

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_r + \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} c_\alpha \nabla S_\alpha. \quad (4.2)$$

*Ici,  $\mathcal{I} = \{2\}$  si  $\omega^+ > \frac{\pi}{2}$  ou  $\omega^- > \frac{\pi}{2}$ , et  $\mathcal{I} = \{1\}$  sinon.*

*Si  $\mathbf{E}$  est la solution du problème (4.1) avec  $\mathbf{J}_s \in \mathbf{L}^2(Q)$  et  $\text{div } \mathbf{J}_s = 0$  dans  $Q$  et  $\text{supp}(\mathbf{J}_s) \cap \Sigma = \emptyset$ , alors  $\mathbf{E}_r$  appartient à  $\mathbf{H}^{3/2-\eta}(\Omega)$  quel que soit  $\eta \in ]0, 1/2]$ .  $\square$*

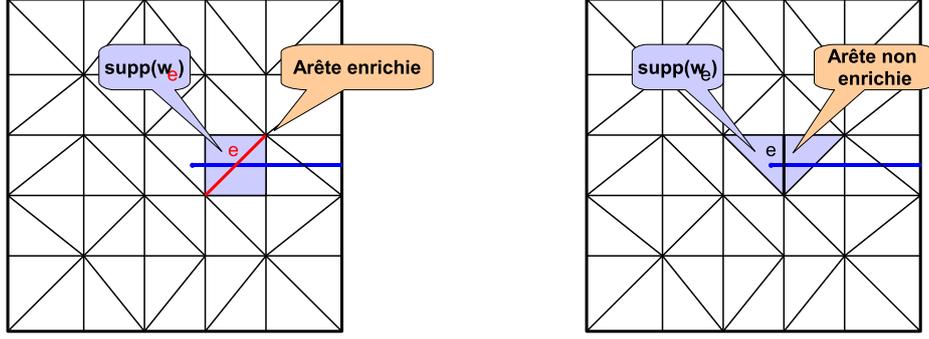


FIGURE 4.1 – Exemple d'arête enrichie (gauche) et non enrichie (droite)

On peut remarquer que la partie régulière  $\mathbf{E}_r$  de la solution du problème (4.1) est à rotationnel dans  $H^1(\Omega)$ . En effet, on a  $\text{curl } \mathbf{E}_r = \text{curl } \mathbf{E}$  et  $\text{curl } \mu^{-1} \text{curl } \mathbf{E} = i\omega \mathbf{J}_s + \omega^2 \varepsilon_\sigma \mathbf{E} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ . Or, en deux dimensions, l'opérateur  $\text{curl}$  est un gradient tourné ce qui montre le résultat vu que  $\mu$  est supposé constant.

#### 4.2.2 Discrétisation par XFEM-arêtes

A présent, nous considérons une triangulation  $\mathcal{T}_h$  du domaine non fissuré  $Q$ . Soit  $\mathcal{E}$  l'ensemble des arêtes (orientées) de  $\mathcal{T}_h$  et  $X_h^{\text{edge}} = \text{Vect}(\mathbf{w}_e, e \in \mathcal{E})$  l'espace de discrétisation par éléments finis d'arête défini dans la section 1.5.1 qui est engendré par les fonctions de base  $\mathbf{w}_e$ . Précisons que  $X_h^{\text{edge}}$  est conforme dans  $\mathcal{H}(\text{curl}; Q)$ .

Afin de prendre en compte la discontinuité du champ électrique à travers la fissure, nous définissons l'ensemble des *arêtes enrichies*  $\mathcal{E}_H$  par

$$e \in \mathcal{E}_H \text{ si et seulement si la fissure traverse } \text{supp}(\mathbf{w}_e).$$

La figure 4.1 montre deux exemples de fissures, l'une enrichie, l'autre non. On peut noter en particulier que le triangle qui contient le fond de fissure, ne contient aucune arête enrichie.

La discontinuité à travers  $\Sigma$  est maintenant introduite par une fonction de type Heaviside,

$$H(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^+, \\ -1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^-, \end{cases} \quad (4.3)$$

tandis que les singularités au fond de fissure ainsi qu'à son embouchure seront ajoutées explicitement à l'espace de discrétisation. Ceci conduit à l'espace de la méthode XFEM-arêtes

$$X_h^{\text{XFEM}} = X_h^{\text{edge}} \oplus \text{Vect}(H\mathbf{w}_e, e \in \mathcal{E}_H) \oplus \text{Vect}(\nabla S_\alpha, \alpha \in \mathcal{I}). \quad (4.4)$$

La méthode XFEM-arêtes est conforme dans  $\mathcal{H}(\text{curl}; \Omega)$  : nous pouvons montrer que  $X_h^{\text{XFEM}} \subset \mathcal{H}(\text{curl}; \Omega)$ . Si  $V_h^{\text{XFEM}} = X_h^{\text{XFEM}} \cap \mathcal{H}_{0,\Gamma}(\text{curl}; \Omega)$  désigne l'espace de discrétisation avec prise en compte de la condition aux limites sur  $\Gamma$ , le problème discret s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{E}_h \in V_h^{\text{XFEM}} \text{ tel que} \\ (\mu^{-1} \text{curl } \mathbf{E}_h, \text{curl } \mathbf{F}_h) - \omega^2 (\varepsilon_\sigma \mathbf{E}_h, \mathbf{F}_h) \forall \mathbf{F}_h \in V_h^{\text{XFEM}}. \end{cases} \quad (4.5)$$

Remarquons que nous nous trouvons dans un cadre fonctionnel qui permet l'application du Lemme de Céa. Aussi, une estimation de l'erreur de discrétisation passe par la définition appropriée d'un opérateur d'interpolation. Pour cela, nous avons adapté les travaux de Chahine et al. [30, 32] au problème des équations de Maxwell.

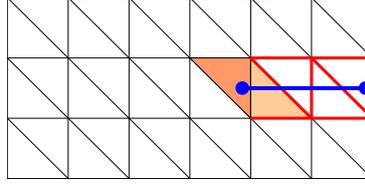


FIGURE 4.2 – Triangles proches du fond de fissure.

Supposons que le champ  $\mathbf{u}$  se décompose en une partie régulière  $\mathbf{u}_r \in \mathbf{H}^1(\Omega)$  ainsi qu'une partie singulière selon (4.2). Nous définissons alors l'interpolée XFEM-arêtes de  $\mathbf{E}$  par

$$\mathbf{r}_h^{\text{XFEM}} \mathbf{u} = \sum_{e \in \mathcal{E}} a_e \mathbf{w}_e + \sum_{e \in \mathcal{E}_H} b_e H \mathbf{w}_e + \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} c_\alpha \nabla S_\alpha$$

où les coefficients  $c_\alpha$  sont ceux de la décomposition (4.2), et  $a_e$  et  $b_e$  sont donnés par les degrés de liberté associés aux arêtes de la façon suivante : si l'arête  $e$  n'est pas enrichie ( $e \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_H$ ), alors

$$a_e = \ell_e(\mathbf{u}_r) = \int_e \mathbf{u}_r \cdot \boldsymbol{\tau}_e \, ds.$$

Si au contraire,  $e \in \mathcal{E}_H$  est une arête enrichie, les coefficients  $a_e$  et  $b_e$  sont donnés par

$$\begin{aligned} a_e + b_e &= \ell_e(\mathbf{E}^+ \mathbf{u}_r) \\ a_e - b_e &= \ell_e(\mathbf{E}^- \mathbf{u}_r). \end{aligned}$$

Ici,  $\mathbf{E}^+$  (resp.  $\mathbf{E}^-$ ) désigne un opérateur de prolongement de  $\Omega^+$  (resp.  $\Omega^-$ ) vers  $Q$  qui préserve la régularité du rotationnel. Cette définition garantit une estimation optimale de l'erreur d'interpolation sur les triangles d'intersection vide avec la fissure ainsi que sur les triangles dont toutes les arêtes sont enrichies. En effet, sur un triangle  $K$  qui n'intersecte pas la fissure, on a  $(\mathbf{r}_h^{\text{XFEM}} \mathbf{u}_r)_K = \mathbf{r}_K \mathbf{u}_r$  où  $\mathbf{r}_K$  est l'opérateur d'interpolation local relatif aux éléments finis d'arête classiques. De même, sur un triangle  $K$  dont toutes les arêtes sont enrichies, on montre que

$$(\mathbf{r}_h^{\text{XFEM}} \mathbf{u}_r)_{K \cap \Omega^\pm} = (\mathbf{r}_K \mathbf{E}^\pm \mathbf{u}_r)_{K \cap \Omega^\pm}$$

et on applique les estimations classiques (cf. [83]) au champ prolongé  $\mathbf{E}^\pm \mathbf{u}_r$ . La méthode XFEM-arêtes pourrait alors être qualifiée de méthode d'ordre 1, conformément à l'ordre des éléments finis d'arête de plus bas degré. Toutefois, en raison de la faible régularité de la partie régulière  $\mathbf{E}_r$  qui, en général, n'appartient pas à  $\mathbf{H}^2(\Omega)$ , il existe deux triangles particuliers sur lesquels l'erreur d'interpolation  $\mathbf{E} - \mathbf{r}_h^{\text{XFEM}} \mathbf{E}$  est seulement en  $\mathcal{O}(h^{1/2-\eta})$  avec  $\eta$  arbitrairement proche de 0. Ces triangles sont le triangle de fond de fissure et son voisin (cf. Figure 4.2).

Les estimations locales conduisent au

**Théorème 4.2. [Estimation de l'erreur de discrétisation]**

Soit  $\mathbf{E} \in \mathcal{H}_{0,\Gamma}(\text{curl}; \Omega)$  la solution de (4.1) et  $\mathbf{E}_h \in V_h^{\text{XFEM}}$  la solution du problème discret (4.5) par la méthode XFEM-arêtes. Soit  $\mathbf{E}_r \in \mathbf{H}^1(\Omega)$  la partie régulière de  $\mathbf{E}$  selon la décomposition (4.2) telle que  $\text{curl } \mathbf{E}_r \in H^1(\Omega)$ . Alors il existe une boule  $B_h^*$  de rayon  $\mathcal{O}(h)$  centrée en  $\mathbf{x}^*$  telle que

$$\|\mathbf{E} - \mathbf{E}_h\|_{\mathcal{H}(\text{curl}, \Omega)} \lesssim h \left( \|\mathbf{E}_r\|_{1,\Omega}^2 + \|\text{curl } \mathbf{E}_r\|_{1,\Omega}^2 \right)^{1/2} + h^{1/2-\eta} \|\mathbf{E}_r\|_{\mathbf{H}^{\beta/2-\eta}(B_h^* \cap \Omega)}. \quad (4.6)$$

□

On a déjà évoqué le fait que la présence du terme en  $h^{1/2-\eta}$  dans l'estimation (4.6) est due à la faible régularité de  $\mathbf{E}_r$ . Bien évidemment, on pourrait pallier ce manque de régularité en prenant

en compte dans la partie singulière les termes suivants du développement asymptotique de sorte que la nouvelle partie régulière ait la régularité  $H^2$  (cf.[43] pour l'étude du champ électrique au voisinage d'un point angulaire). La méthode XFEM-arêtes serait alors d'ordre 1 ce qui est optimal.

### 4.2.3 Implémentation

Pour l'implémentation de la méthode XFEM-arêtes, nous écrivons le problème discret (4.5) sous forme matricielle  $\mathbb{A}^{\text{XFEM}} U^{\text{XFEM}} = F^{\text{XFEM}}$ . En raison de la structure de l'espace de discrétisation  $X_h^{\text{XFEM}}$ , le système  $\mathbb{A}^{\text{XFEM}} U^{\text{XFEM}} = F^{\text{XFEM}}$  a une structure par blocs :

$$\begin{bmatrix} \mathbb{A}_E & \mathbb{B}_E & \mathbb{C}_E \\ \mathbb{B}_E^T & \mathbb{A}_H & \mathbb{C}_H \\ \mathbb{C}_E^T & \mathbb{C}_H^T & \mathbb{A}_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_E \\ U_H \\ U_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_E \\ F_H \\ F_S \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Les différents blocs du système reflètent les trois parties de l'espace  $X_h^{\text{XFEM}}$ , à savoir

- les éléments finis d'arête classiques  $X_h^{\text{edge}}$  pour les blocs  $\mathbb{A}_E$ ,  $U_E$  et  $F_E$ ,
- les éléments finis enrichis  $\text{Vect}(H\mathbf{w}_e, e \in \mathcal{E}_H)$  pour  $\mathbb{A}_H$ ,  $U_H$  et  $F_H$ , et finalement
- la partie singulière  $\text{Vect}(\nabla S_\alpha, \alpha \in \mathcal{I})$  pour  $\mathbb{A}_S$ ,  $U_S$  et  $F_S$ .

Les blocs  $\mathbb{B}_E$ ,  $\mathbb{C}_E$  et  $\mathbb{C}_H$  décrivent l'interaction entre les arêtes classiques, les arêtes enrichies et les singularités. On peut noter que la forme sesqui-linéaire du problème  $(\mu^{-1} \text{curl} \cdot, \text{curl} \cdot) - \omega^2(\varepsilon_\sigma \cdot, \cdot)$  conduit à une matrice *symétrique à coefficients complexes* car  $\Im m \varepsilon_\sigma \neq 0$ . En revanche, elle n'est pas hermitienne. Néanmoins, la coercivité de la forme sesqui-linéaire implique que la matrice du système est inversible.

Il est possible d'écrire le système (4.7) sous forme de *deux* systèmes linéaires ayant la même matrice creuse. Ceci s'avère avantageux aussi bien pour le stockage de la matrice ainsi que pour son conditionnement. En effet, alors que les blocs  $\mathbb{A}_E$ ,  $\mathbb{B}_E$  et  $\mathbb{A}_H$  relèvent de termes de type éléments finis, les blocs  $\mathbb{C}_E$ ,  $\mathbb{C}_H$  et  $\mathbb{A}_S$  sont liés aux singularités et ne sont donc plus creux. En regroupant les termes éléments finis (enrichis ou non) d'une part, et les termes relatifs aux singularités de l'autre, nous obtenons

$$\mathbb{A}^{\text{XFEM}} = \begin{bmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{C} \\ \mathbb{C}^t & \mathbb{A}_S \end{bmatrix}, U^{\text{XFEM}} = \begin{bmatrix} U \\ U_S \end{bmatrix} \text{ et } F^{\text{XFEM}} = \begin{bmatrix} F \\ F_S \end{bmatrix}$$

$$\text{avec } \mathbb{A} = \begin{bmatrix} \mathbb{A}_E & \mathbb{B}_E \\ \mathbb{B}_E^T & \mathbb{A}_H \end{bmatrix}, \mathbb{C} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}_E \\ \mathbb{C}_H \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} U_E \\ U_H \end{bmatrix} \text{ et } F = \begin{bmatrix} F_E \\ F_H \end{bmatrix}.$$

Ensuite, nous pouvons calculer la solution de (4.7) par l'algorithme suivant en suivant une idée de [63].

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \text{ résoudre } \mathbb{A}V = F \\ (2) \text{ résoudre } \mathbb{A}S = \mathbb{C} \\ (3) \text{ résoudre } (\mathbb{A}_S - \mathbb{C}^t S)U_S = F_S - \mathbb{C}^t V \\ (4) \text{ poser } U = V - S U_S \end{array} \right. \quad (4.8)$$

On peut remarquer que la matrice  $\mathbb{A}_S - \mathbb{C}^t S$  du système de l'étape (3) est le complément de Schur de la matrice  $\mathbb{A}^{\text{XFEM}}$  du fait que  $S = \mathbb{A}^{-1} \mathbb{C}$  par (2). Les propriétés de la matrice  $\mathbb{A}^{\text{XFEM}}$  garantissent alors l'existence et l'unicité de  $U_S$ . Ici, nous avons choisi d'utiliser des méthodes directes pour la résolution du système comme par exemple la factorisation de Crout  $\mathbb{A} = LDL^t$  avec une matrice  $L$  triangulaire inférieure et une matrice  $D$  diagonale.

Les calculs élémentaires pour la matrice  $\mathbb{A}^{\text{XFEM}}$  font intervenir des intégrales sur des triangles qui sont traversés par la fissure. En pratique, chacun de ces triangles est coupé en trois sous-triangles situés d'un seul côté de la fissure (cf. Figure 4.3). Les formules de quadrature sont ensuite appliquées sur les sous-triangles. Une telle approche a été développée dans [30] pour une méthode XFEM basée sur les éléments finis de Lagrange.

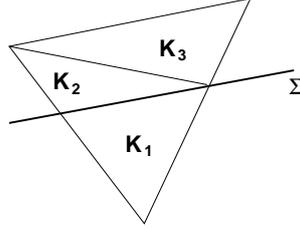
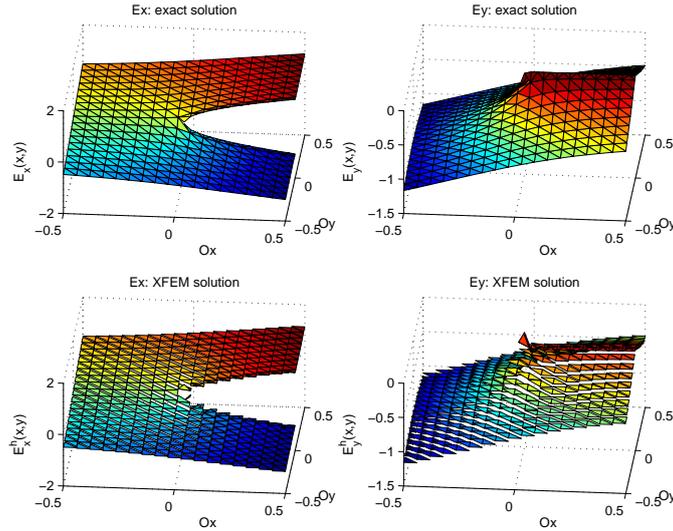


FIGURE 4.3 – Découpage d'un triangle enrichi.

FIGURE 4.4 – Solution exacte de régularité  $H^{3/2-\eta}$  (haut) et approximation par XFEM-arêtes (bas).

#### 4.2.4 Résultats numériques

Nous terminons cette section avec quelques résultats numériques (cf [LLN11] pour un aperçu plus complet). Pour valider la méthode XFEM-arêtes, nous l'avons appliquée dans des cas où une solution analytique est connue. Nous avons choisi un maillage structuré du domaine non fissuré  $Q$  en triangles rectangles. La figure 4.4 montre l'approximation par XFEM-arêtes du champ

$$\mathbf{E}(r, \theta) = \nabla \left( r^{3/2} \sin \left( \frac{3\theta}{2} \right) \right)$$

donné en coordonnées polaires locales par rapport au fond de fissure  $\mathbf{x}^*$ . La partie singulière de cette solution est nulle, tandis que la partie régulière, qui coïncide donc avec  $\mathbf{E}$ , a la régularité minimale  $H^{3/2-\eta}$ . Notons qu'il s'agit d'un problème avec condition aux limites non homogène puisque  $\mathbf{E}$  n'est pas à trace tangentielle nulle sur  $\Gamma$ . On procède alors par relèvement numérique de la composante tangentielle sur le bord. Le taux de convergence observé  $\tau_{\text{num}} \approx 0.99$  est très proche de 1, contrairement à ce que les résultats théoriques du Théorème 4.2 laissaient craindre. Il est possible que l'estimation (4.6) ne soit pas optimale et que la trop faible régularité de la partie régulière n'influence pas l'ordre de convergence dans la pratique.

Dans un deuxième exemple, nous imposons une source surfacique sur le bord inférieur du domaine ( $y = -0.5$ ), tandis que la source volumique  $\mathbf{J}_s$  vaut zéro. Comme auparavant, il s'agit d'une condition aux limites non homogène qu'on prend en compte par un relèvement numérique. La figure 4.5 met en évidence la discontinuité de la composante tangentielle du champ, alors que la composante normale s'annule conformément au modèle.

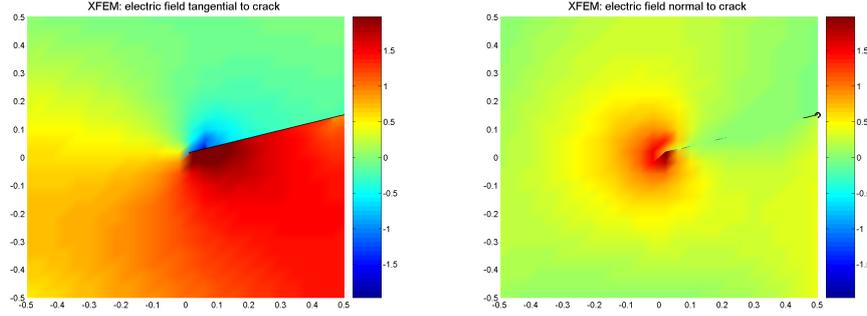


FIGURE 4.5 – Solution avec source surfacique sur le bord inférieur ( $y = -0.5$ ). Composante tangentielle (gauche) et composante normale (droite) à la fissure.

#### 4.2.5 Le cas instationnaire

Finalement, nous avons testé une configuration instationnaire correspondant au modèle (1.8) des équations de Maxwell en régime transitoire :

$$\begin{cases} \varepsilon \partial_t^2 \mathcal{E} + \mathbf{curl} \mu^{-1} \mathbf{curl} \mathcal{E} &= \mathbf{0} & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ \mathcal{E} \times \mathbf{n} &= g_s & \text{sur } \Gamma \times (0, T), \\ \mu^{-1} \mathbf{curl} \mathcal{E} \times \mathbf{n} &= \mathbf{0} & \text{sur } \Sigma \times (0, T), \\ \mathcal{E}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{E}_0, \partial_t \mathcal{E}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{E}_1 && \text{sur } \Omega. \end{cases} \quad (4.9)$$

Ici, nous supposons que le matériau est diélectrique de permittivité  $\varepsilon > 0$  et de perméabilité  $\mu > 0$ . Le problème (4.9) est bien posé si la donnée  $g_s$  (qui est une fonction dépendant du temps) permet un relèvement régulier. En particulier,  $g_s$  devrait s'annuler à l'embouchure de la fissure afin de satisfaire les conditions de compatibilité entre les traces sur  $\Sigma$  et celles sur  $\Gamma$ . La formulation faible du problème (4.9) rentre alors dans le cadre de la théorie variationnelle de Lions-Magenès [75], et la solution admet une décomposition en parties régulière et singulière selon (4.2) avec des coefficients  $c_\alpha = c_\alpha(t)$  continus sur l'intervalle de temps  $[0, T]$  (cf. [13]).

La discrétisation en espace par la méthode XFEM-arêtes conduit à un système d'équations différentielles ordinaires que l'on choisit de résoudre numériquement par un schéma de Newmark implicite d'ordre 2 et inconditionnellement stable. La Figure 4.6 ci-dessous compare l'intensité du champ électrique en présence d'une fissure (colonne gauche) avec celle dans un matériau sans défaut (colonne droite). La donnée au bord  $g_s$  est donnée dans les deux cas par

$$g_s(x, y, t) = \begin{cases} \chi(t) \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) & \text{si } y = -0.5, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ici,  $\chi(t)$  est une fonction de troncature régulière telle que  $\chi \equiv 0$  au voisinage de  $t = 0$ . Ceci modélise une source agissant seulement après un laps de temps initial et permet de satisfaire les conditions de compatibilité avec les données initiales  $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_1 = \mathbf{0}$ .

On voit clairement que la fissure perturbe la propagation du champ électromagnétique après un certain temps qui dépend de la vitesse de propagation dans le milieu.

### 4.3 Application à l'identification de fissures

Dans cette section, nous appliquons la méthode XFEM-arêtes à la localisation de fissures : à partir de mesures prises sur l'objet à contrôler, nous cherchons la position et la forme de la fissure qui est à l'origine des mesures.

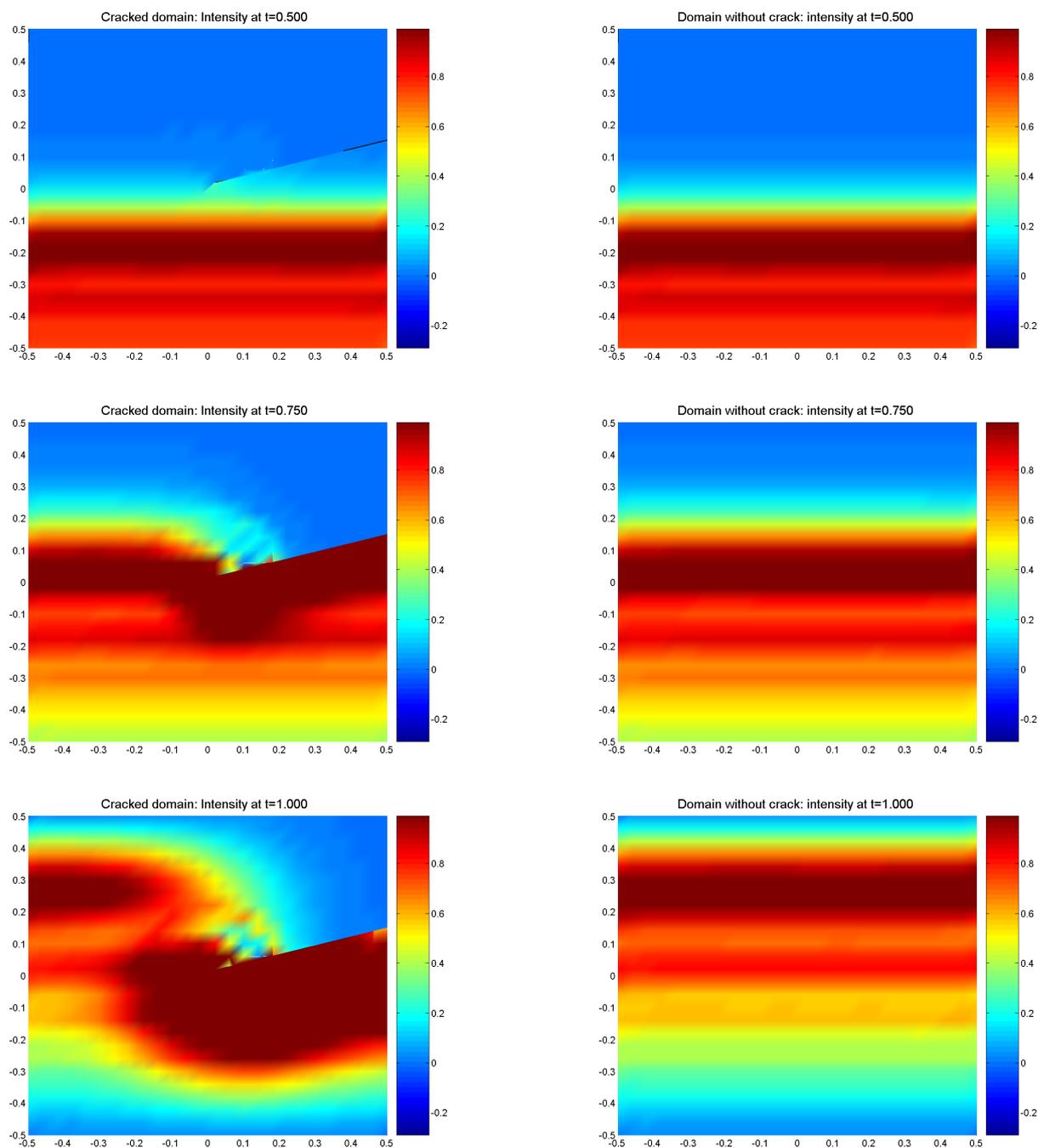


FIGURE 4.6 – Evolution en temps de l'intensité du champ électrique dans un domaine avec fissure (colonne gauche) et dans un domaine sans défaut (colonne droite)

Notre démarche s'inspire des travaux de Rabinovich et al. [95, 96] qui ont testé une approche similaire dans le cadre du contrôle non destructif par ultrasons. Nous mettons en place un algorithme génétique (AG) pour la minimisation de la fonction coût. Quant au problème direct, il sera résolu par la méthode XFEM-arêtes présentée dans la section précédente. Le choix d'une méthode d'optimisation de type AG a été guidé par le manque d'informations *a priori* sur la fonction coût. En effet, les algorithmes génétiques sont connus pour être capables de trouver de façon efficace un ensemble de bonnes solutions dans un espace de recherche de taille très importante. Par ailleurs, l'utilisation d'un AG a permis de mettre à l'épreuve la méthode XFEM-arêtes dans une situation où une méthode d'éléments finis classique aurait conduit à des temps de calculs prohibitifs du fait du grand nombre d'évaluations de la fonction coût. Rappelons qu'une méthode d'éléments finis classique utilise un maillage conforme à la géométrie ce qui nécessite le remaillage du domaine de calcul chaque fois que la géométrie de la fissure change. La méthode XFEM-arêtes, quant à elle, est basée sur un seul maillage (du domaine non fissuré) ce qui permet d'éviter la coûteuse étape de remaillage. Tous les calculs ont été effectués sur la machine CLOVIS du Centre de calcul de Champagne-Ardenne ROMEO.

### 4.3.1 Définition de la fonction coût

En l'absence de mesures expérimentales, nous avons généré des mesures synthétiques par la résolution du problème direct pour une fissure  $\Sigma^*$  fixée qu'il s'agissait alors de retrouver par l'algorithme d'optimisation. Plus précisément, on cherche à minimiser l'écart  $m^* - m(\Sigma)$  entre les mesures  $m^*$  prises sur la pièce endommagée  $\Omega^* = Q \setminus \Sigma^*$  et la prédiction  $m(\Sigma)$  des mesures sur un domaine de fissure  $\Sigma$ .

Nous avons testé notre approche pour plusieurs types de mesures (cf. [BoLeLo12]). Ici, nous présentons les résultats pour le modèle instationnaire (4.9) pour lequel nous avons choisi des mesures de type "énergie magnétique" :

$$W(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mu^{-1} |\operatorname{curl} \mathcal{E}(\mathbf{x}, t)|^2 dx. \quad (4.10)$$

La fonction coût correspondant à  $W$  est alors définie par

$$\mathcal{C}(\Sigma) = \frac{\|W - W^*\|_{L^2((0,T))}}{\|W^*\|_{L^2((0,T))}}, \quad (4.11)$$

où  $W^*(t)$  représente la mesure prise sur la pièce à contrôler à l'instant  $t$ .  $\mathcal{C}$  dépend de la fissure  $\Sigma$  à travers le domaine de calcul  $\Omega = Q \setminus \Sigma$  et le champ  $\mathcal{E}$ , solution de (4.9) sur  $\Omega$ .

Quant au problème inverse, il est formulé pour des raisons de stabilité numérique, par la *maximisation* d'une fonction score :

$$\arg \max_{\Sigma} \mathcal{S}(\Sigma) \quad (4.12)$$

avec

$$\mathcal{S}(\Sigma) = \frac{1}{1 + \mathcal{C}(\Sigma)}.$$

On note que la fissure recherchée conduit idéalement à un score  $\mathcal{S}(\Sigma^*) = 1$ .

### 4.3.2 Paramètres de l'algorithme génétique

Nous avons choisi de résoudre le problème de maximisation (4.12) par un algorithme génétique. Le principe d'un algorithme génétique est simple et emprunte le vocabulaire de la théorie d'évolution : à partir d'une population initiale, les individus de la population actuelle évoluent par croisement et mutation vers une population d'individus mieux adaptés au critère d'optimisation (cf. Figure 4.7). Les critères de sélection, de croisement et de mutation varient d'un AG à l'autre, et nous précisons dans la suite de ce paragraphe les paramètres pour la mise en œuvre du nôtre.

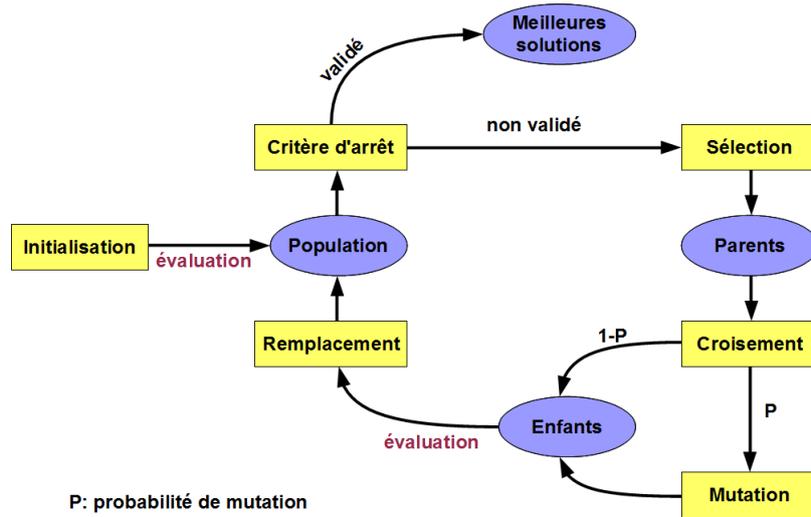


FIGURE 4.7 – Schéma d'un algorithme génétique.

**Codage d'un individu :** Dans notre étude, les individus sont les fissures. Un individu est alors codé par une suite  $\mathbf{X}_c = (\mathbf{X}(1), \dots, \mathbf{X}(P))$  de  $P \geq 2$  points du domaine  $Q$ . Les points  $\mathbf{X}(p)$  sont deux à deux distincts avec une distance minimale qui dépend du pas du maillage. Par ailleurs, nous imposons que le premier point  $\mathbf{X}(1)$  appartienne au bord  $\Gamma$ , tandis que les autres points sont situés à l'intérieur de  $Q$ . Les tests que nous montrons ci-dessous ont été effectués avec des populations de fissures définies par  $P = 2$  points, correspondant respectivement à l'embouchure et au fond de fissure.

**Taille d'une population :** A chaque itération, la population contient 100 individus.

**Croisement :** La stratégie d'évolution choisie pour le croisement de deux individus correspond à un "cross-over" classique, autrement dit, deux individus échangent l'embouchure ou le fond de fissure (cf. Figure 4.8).

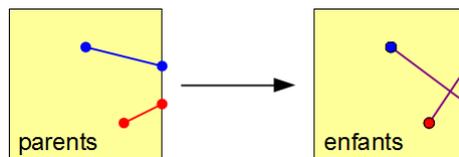


FIGURE 4.8 – Croisement de deux individus.

**Mutation :** Pour une faible proportion d'individus (5% de la population), une modification par mutation est appliquée. Il s'agit de changer légèrement la position d'un des points  $\mathbf{X}(p)$  choisi de façon aléatoire.

**Critères d'arrêt :** Le choix des critères d'arrêt est une opération délicate dans le paramétrage d'un AG. En effet, il faut garantir la qualité des solutions trouvées tout en gardant l'efficacité de la méthode. Ici, nous avons procédé à une centaine de tests avant de fixer les paramètres. Ainsi, l'algorithme s'arrête au bout de maximal 50 itérations ou si la fonction score n'a pas été améliorée pendant au moins 15 itérations.

**Parallélisation :** Par nature, un AG est parallélisable : en effet, les multiples évaluations de la fonction score peuvent être effectuées de façon indépendante, et donc parallèle. Ici, nous avons choisi d'implémenter notre algorithme à l'aide de la plateforme ParadisEO [28, 102]. Cette plateforme est dédiée aux méthodes méta-heuristiques et permet une implémentation rapide et efficace en précisant simplement certaines parties spécifiques du problème. La

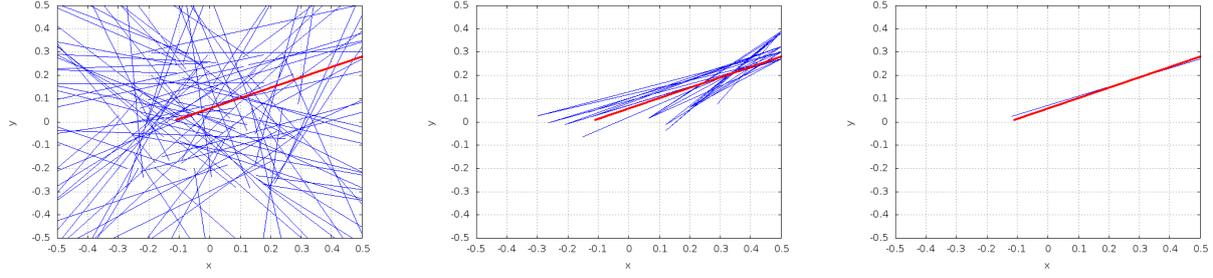


FIGURE 4.9 – Population initiale, intermédiaire et finale. Mesures  $W^*$  générée sur le même maillage que celui utilisé par l'AG.

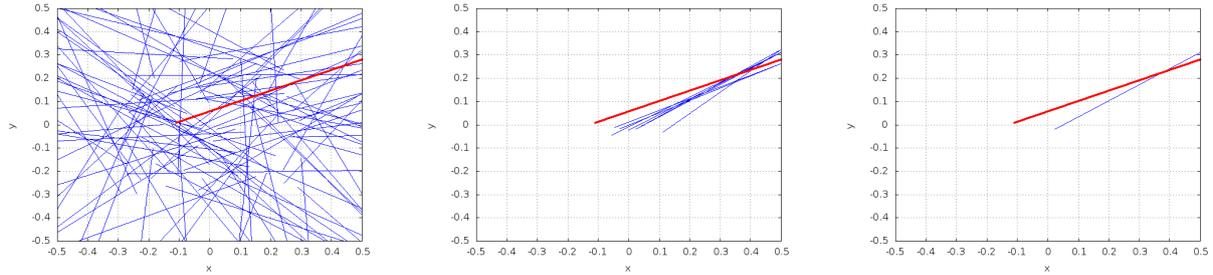


FIGURE 4.10 – Population initiale, intermédiaire et finale. Mesures  $W^*$  générée sur un maillage plus fin que celui utilisé par l'AG.

parallélisation des méthodes est réalisée au sein de la plateforme et ne nécessite aucun travail supplémentaire.

### 4.3.3 Résultats numériques

Les résultats numériques présentés dans ce paragraphe correspondent au problème inverse (4.12) relatif à la résolution du problème direct (4.9) pour la fonction source

$$g_s(x, y, t) = \begin{cases} \chi(t) \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \eta(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|)(1+x) & \text{si } y = -0.5, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

sur le bord extérieur  $\Gamma$ . Ici,  $\chi$  et  $\eta$  sont deux fonctions de troncature qui s'annulent au voisinage de 0. Ceci garantit la compatibilité de  $g_s$  avec la condition aux limites sur  $\Sigma$  et des conditions initiales  $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_1 = \mathbf{0}$ . Par ailleurs, on peut noter la présence du terme  $1+x$  afin d'éviter une symétrie du problème. Les coefficients électromagnétiques ainsi que le temps final pour ce problème à caractère académique ont été fixés à 1.

Les figures 4.9 et 4.10 ci-dessous montrent l'évolution de la population initiale vers une population finale où tous les individus s'accumulent en une fissure proche de la fissure recherchée. Pour le test de la figure 4.9, les mesures ont été générées par une simulation sur le même maillage que celui utilisé par l'AG ce qui constitue en quelque sorte un "crime inverse". Dans le deuxième test (Figure 4.10), nous avons utilisé un maillage plus fin pour la génération des mesures ce qui explique l'augmentation de l'erreur.

Il est toujours possible qu'un AG converge prématurément vers une solution erronée. Afin d'éviter cette dérive, chaque test a été répété une dizaine de fois. La table 4.1 donne les statistiques pour les différentes configurations. Si on compare par exemple les scores moyens du meilleur individu trouvé au cours des 10 essais, on voit que le test avec mesures sur maillage plus fin ( $\mathcal{S} = 0.92$ ) est moins performant que celui avec mesures sur le même maillage ( $\mathcal{S} = 0.98$ ). En effet, on peut vérifier que la fissure recherchée  $\Sigma^*$  conduit à un score différent de 1 si les mesures ont été générées par le maillage plus fin que celui utilisé par l'AG. En revanche, les deux

		$W^*$ par le même maillage	$W^*$ par maillage plus fin
<b>Score du meilleur individu</b>	Maximum	0.99	0.92
	Minimum	0.95	0.92
	Moyenne	<b>0.98</b>	<b>0.92</b>
	Ecart type	0.01	0.00
<b>Erreur du meilleur individu</b>	Maximum	0.75	0.23
	Minimum	0.01	0.10
	Moyenne	<b>0.14</b>	<b>0.15</b>
	Ecart type	0.22	0.04
<b>Nombre d'itérations</b>	Maximum	35	31
	Minimum	10	13
	Moyenne	<b>21</b>	<b>20</b>
	Ecart type	8	6

TABLE 4.1 – Statistiques sur 10 essais.

configurations donnent des résultats comparables quant à l'erreur moyenne et le nombre moyen d'itérations. Ici, l'erreur du meilleur individu correspond à la moyenne quadratique de la distance entre les points définissant la fissure recherchée  $\Sigma^*$  et celle que l'on a trouvée.

## 4.4 Application aux courants de Foucault

Les courants de Foucault sont des courants électriques qui sont induits dans des matériaux conducteurs par un champ magnétique variable. Depuis leur découverte par le physicien français Léon Foucault (1819–1868), les courants de Foucault ont trouvé de nombreuses applications parmi lesquelles les systèmes de freinage sur poids lourds, les plaques de cuisson à induction ou le contrôle non destructif (CND). C'est cette dernière application qui a motivé nos travaux sur les éléments finis étendus. Le principe du CND par courants de Foucault est simple : on approche une bobine parcourue par un courant alternatif de la pièce à inspecter. Le champ magnétique de la bobine induit dans la pièce conductrice les courants de Foucault lesquels génèrent à leur tour un champ magnétique qui interagit avec le champ magnétique de la bobine. Il en résulte une variation mesurable de l'impédance de la bobine. Lorsque la pièce à contrôler présente des fissures, les courants de Foucault sont déviés et la variation d'impédance change de façon significative et permet ainsi de détecter les défauts. Du fait de l'effet de peau, les courants de Foucault ne pénètrent que peu dans le milieu conducteur. Ils sont ainsi utilisés principalement pour la détection de défauts de surface ou en petite profondeur.

Dans le cas d'une géométrie simple, la variation d'impédance peut être calculée à l'aide de la solution d'une équation intégrale posée sur la surface de la fissure (cf. [23] parmi d'autres). Ici, nous nous intéressons à des méthodes basées sur la connaissance du champ électrique dans le domaine volumique ce qui permet de prendre en compte des géométries plus complexes. En vue d'une discrétisation par la méthode des éléments finis étendus qui nécessite la connaissance du comportement asymptotique au voisinage de la fissure, nous aborderons dans les sections 4.4.1 et 4.4.2 le problème en champ électrique et la décomposition de ce dernier en une partie régulière et une partie singulière. Notre étude se limite à une configuration en deux dimensions avec une fissure droite. Le domaine de calcul comprend à la fois la pièce à contrôler et le milieu isolant extérieur (de l'air dans notre cas) qui contient la bobine. Le comportement singulier au voisinage du fond de fissure est asymptotiquement le même que pour le problème étudié à la section 4.2. En revanche, à l'embouchure de la fissure, la situation est totalement différente du fait que le point d'embouchure se situe non plus sur le bord du domaine, mais bien sur l'interface

entre la pièce conductrice et l'air. Nous avons démontré dans [LN14] que le champ électrique est régulier dans le conducteur, mais qu'il présente une singularité à l'extérieur dont nous donnons la forme explicite. Nos résultats sont en cohérence avec les descriptions dans la littérature de la communauté physique et électronique [25] et donnent un cadre fonctionnel rigoureux pour la formulation variationnelle du problème des courants de Foucault en présence d'une fissure débouchante. Pour les simulations numériques par la méthode des éléments finis étendus, nous adoptons la formulation  $\mathbf{A} - \psi$  en potentiels combinés que nous présentons dans la section 4.4.3. La section 4.4.4 est consacrée à la discrétisation du problème  $\mathbf{A} - \psi$  par éléments finis étendus et à la présentation de quelques résultats numériques pour le problème direct.

#### 4.4.1 Le problème des courants de Foucault en champ électrique

Soit  $Q_c$  un domaine de  $\mathbb{R}^d$  avec  $d = 2$  ou  $d = 3$  représentant une pièce conductrice de conductivité constante  $\sigma_c > 0$ . Considérons un domaine  $Q \subset \mathbb{R}^d$  tel que  $\overline{Q_c} \subset Q$  et notons  $Q_e = Q \setminus \overline{Q_c}$  le milieu extérieur de conductivité 0 (il s'agit en général de l'air). Soient finalement  $\Gamma_\infty = \partial Q$  le bord de  $Q$  et  $\Gamma_j, j = 0, \dots, J$ , les composantes connexes de l'interface  $\Gamma = \partial Q_c \cap \partial Q_e$  entre le conducteur et l'air. Dans la suite, nous notons  $\mathbf{u}_c$  (resp.  $\mathbf{u}_e$ ) la restriction d'un champ  $\mathbf{u}$  au conducteur (resp. au domaine extérieur).

Le modèle des courants de Foucault est dérivé des équations de Maxwell (1.1) en négligeant le courant de déplacement  $\partial_t \mathcal{D}$ . En régime harmonique, ceci consiste à mettre à zéro le terme  $\omega \varepsilon$  qui est négligeable devant la conductivité  $\sigma_c$  lorsque la fréquence angulaire  $\omega$  n'est pas trop grande. C'est dans ce sens que l'on doit comprendre la terminologie 'modèle basse fréquence' employée parfois pour le modèle des courants de Foucault. On trouve dans [6] une analyse asymptotique qui montre que le modèle des courants de Foucault est une approximation d'ordre deux des équations de Maxwell sous certaines conditions sur la densité de courant  $\mathbf{J}$ .

A la limite  $\omega \varepsilon \rightarrow 0$ , les lois d'Ampère et de Faraday s'écrivent

$$\operatorname{curl} \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (4.13a)$$

$$\operatorname{curl} \mathbf{E} = -i\omega \mu \mathbf{H}. \quad (4.13b)$$

La densité de courant  $\mathbf{J}$  est la somme d'un terme source  $\mathbf{J}_s$  qui représente la bobine et des courants de Foucault  $\mathbf{J}_{CF}$  qui, d'après la loi d'Ohm, sont proportionnels au champ électrique  $\mathbf{E}$  et n'existent que dans le conducteur :

$$\mathbf{J}_{CF} = \sigma \mathbf{E}.$$

Nous supposerons désormais que  $\mathbf{J}_s$  vérifie les conditions

$$\operatorname{div} \mathbf{J}_s = 0 \text{ dans } Q, \text{ et } \operatorname{supp}(\mathbf{J}_s) \subset Q_e \quad (4.14)$$

ce qui correspond à la configuration d'une bobine située à une petite distance du conducteur.

En éliminant le champ magnétique  $\mathbf{H}$  des équations (4.13), on obtient la formulation en champ électrique du modèle des courants de Foucault,

$$\operatorname{curl} \mu^{-1} \operatorname{curl} \mathbf{E} + i\omega \sigma \mathbf{E} = -i\omega \mathbf{J}_s \quad (4.15)$$

qui sera complétée par les conditions de jauge

$$\operatorname{div}(\varepsilon_e \mathbf{E}_e) = 0 \text{ dans } Q_e, \text{ et } \langle \mathbf{E}_e \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\Gamma_j} = 0, \forall j = 0, \dots, J. \quad (4.16)$$

ainsi qu'une condition de radiation à l'infini ou encore une condition aux limites  $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0$  sur le bord extérieur  $\Gamma_\infty$ . Le caractère bien posé de ce problème a été démontré dans [6] pour des domaines non bornés de topologie non triviale. Il s'avère en effet que les propriétés topologiques du conducteur jouent un rôle important dans la détermination des courants de Foucault. Les conditions (4.16) apparaissent naturellement en dérivant d'abord des propriétés sur la divergence

de la solution des équations de Maxwell complètes, et en passant ensuite à la limite en  $\omega\varepsilon$  (cf. [46] pour une discussion détaillée).

Supposons maintenant que le conducteur  $Q_c$  présente une fissure  $\Sigma$  débouchante (cf. Figure 4.11). Nous nous limitons à une fissure droite dans une configuration 2D. La question du comportement des courants de Foucault au voisinage de singularités géométriques du conducteur a été adressée dans [46], mais le cas d'une fissure n'y est pas traité. Ici, nous supposons pour simplifier la présentation que le conducteur  $Q_c$  ainsi que le domaine de calcul  $Q$  sont réguliers. Pour fixer les idées, nous supposerons que l'embouchure  $\mathbf{x}_0$  de la fissure est située sur  $\Gamma_0$ . Nous notons  $\Gamma_0^\pm$  les parties de l'interface de part et d'autre de  $\mathbf{x}_0$  et posons  $\Gamma_0^0 = \Gamma_0 \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ . Comme auparavant,  $\mathbf{x}^*$  désigne le fond de fissure. Le problème des courants de Foucault est alors posé dans le domaine fissuré  $\Omega = Q \setminus \Sigma$  et nous notons  $\Omega_c = Q_c \setminus \Sigma$ . Nous considérons le cas d'une fissure idéale d'épaisseur nulle. Ainsi, aucun courant ne traverse la fissure ce qui se traduit par les conditions

$$[\mathbf{E} \times \mathbf{n}] \neq 0 \text{ et } \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Sigma. \quad (4.17)$$

Le problème des courants de Foucault dans un domaine avec fissure s'écrit alors

$$\begin{cases} \mathbf{curl} \mu^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{E} + i\omega\sigma \mathbf{E} = -i\omega \mathbf{J}_s & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Sigma \\ \mathbf{E}_e \times \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma_\infty \\ \operatorname{div} \mathbf{E}_e = 0 & \text{dans } \Omega_e \\ \langle \mathbf{E}_e \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\Gamma_j} = 0 & \forall j = 0, \dots, J. \end{cases} \quad (4.18)$$

De la première équation de (4.17), on déduit que  $\sigma \mathbf{E}$  est à divergence nulle dans  $\Omega$  et même dans  $Q$  du fait que  $\mathbf{E}_c \cdot \mathbf{n} = 0$  sur  $\Sigma$ . Ceci implique la continuité de la trace normale du champ  $\sigma \mathbf{E}$  à travers l'interface  $\Gamma$ . Puisque  $\sigma = 0$  dans  $\Omega_e$ , on obtient facilement

$$\mathbf{E}_c \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_j, \quad j = 0, \dots, J. \quad (4.19)$$

L'espace naturel pour le champ électrique sur  $\Omega_c$  est alors  $\mathcal{H}(\operatorname{curl}; \Omega_c) \cap \mathcal{H}_0(\operatorname{div}; \Omega_c)$ . La question du choix d'un espace variationnel pour  $\mathbf{E}_e$  est plus délicate. D'après la loi de Faraday,  $\operatorname{curl} \mathbf{E}$  appartient à  $L^2(\Omega)$ , et il semble alors tout indiqué de chercher  $\mathbf{E}_e$  dans  $\mathcal{H}(\operatorname{curl}; \Omega_e)$ . Si tel était le cas, la trace tangentielle  $\mathbf{E}_e \times \mathbf{n}$  serait bien définie dans  $H^{-1/2}(\Gamma_j)$  quel que soit  $j = 0, \dots, J$ . D'autre part, les courants de Foucault, et donc  $\mathbf{E}_c$ , sont réguliers au voisinage de l'embouchure  $\mathbf{x}_0$  de la fissure du fait que la fissure forme un angle inférieur à  $\pi$  avec l'interface. Or,  $\mathbf{E}_c \cdot \mathbf{n} = 0$  sur  $\Gamma_0$  et sur  $\Sigma$  ce qui implique que  $\mathbf{E}_c(\mathbf{x}_0) = 0$  puisque  $\mathbf{E}_c(\mathbf{x}_0)$  est orthogonal aux deux vecteurs  $\mathbf{n}_\Sigma$  et  $\mathbf{n}_{\Gamma_0}$ . Par continuité de la trace tangentielle de  $\mathbf{E}$  à travers  $\Gamma$ , il viendrait alors que  $\mathbf{E}_e \times \mathbf{n} \equiv 0$  en  $\mathbf{x}_0$  ce qui contredit l'analyse de [25] qui prédit une chute de tension du potentiel électrique à cet endroit. L'espace  $\mathcal{H}(\operatorname{curl}; \Omega_e)$  ne convient donc pas pour la formulation du problème des courants de Foucault en présence d'une fissure débouchante. Nous présentons dans le paragraphe suivant

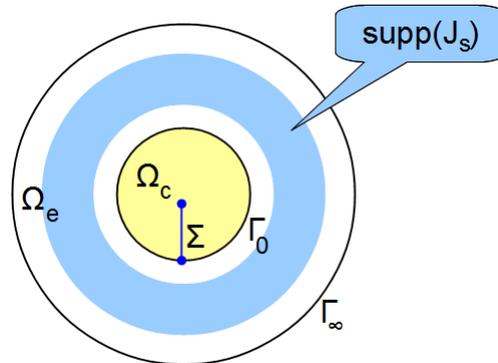


FIGURE 4.11 – Configuration pour le problème des courants de Foucault en présence d'une fissure.

une analyse du comportement asymptotique du champ électrique au voisinage de l'embouchure ce qui permet de définir l'espace fonctionnel pour la formulation variationnelle du problème.

#### 4.4.2 Comportement asymptotique du champ électrique au voisinage de la fissure

Afin de tenir compte d'une éventuelle singularité à l'embouchure  $\mathbf{x}_0$  de la fissure, nous introduisons les espaces de Sobolev à poids relatifs à la distance  $r_0(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$ . Pour un paramètre  $\alpha > 0$ , nous posons

$$L_\alpha^2(\Omega_e) = \{f \in \mathcal{D}'(\Omega_e) \mid r^\alpha f \in L^2(\Omega_e)\} \quad (4.20)$$

et

$$H^{1,\alpha}(\Omega_e) = \{f \in \mathcal{D}'(\Omega_e) \mid r^{\alpha-1} f \in L^2(\Omega_e), r^\alpha \partial_i f \in L^2(\Omega_e) \forall i = 1, 2\}. \quad (4.21)$$

L'espace des champs de vecteurs est alors défini comme suit,

$$\mathbf{X}_\alpha(\Omega) = \left\{ \mathbf{v} \in (\mathcal{D}'(\Omega))^2 \mid \begin{array}{l} \text{curl } \mathbf{v} \in L^2(\Omega); \mathbf{v}_c \in \mathcal{H}_0(\text{div}; \Omega_c); \\ r^\alpha \mathbf{v}_e \in \mathbf{L}^2(\Omega_e); \text{div } \mathbf{v}_e \in L^2(\Omega_e); \mathbf{v}_e \times \mathbf{n} = 0 \text{ on } \Gamma_\infty \end{array} \right\}, \quad (4.22)$$

et nous notons

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{X}_\alpha(\Omega)} = \left( \|\text{curl } \mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{v}_c\|_{0,\Omega_c}^2 + \|\text{div } \mathbf{v}_c\|_{0,\Omega_c}^2 + \|r^\alpha \mathbf{v}_e\|_{0,\Omega_e}^2 + \|\text{div } \mathbf{v}_e\|_{0,\Omega_e}^2 \right)^{1/2}.$$

sa norme.

Le théorème suivant montre que les champs de  $\mathbf{X}_\alpha(\Omega)$  se décomposent en une partie régulière par morceaux et une partie singulière qui dérive d'un potentiel scalaire localisé d'une part au fond de fissure et d'autre part à son embouchure, mais à l'extérieur du conducteur. Pour cela, nous définissons les coordonnées polaires locales en  $\mathbf{x}^*$  par  $(r^*, \theta^*)$  avec  $r^* = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|$  et  $\theta^* \in [-\pi, \pi]$  tel que  $\theta^* = \pm\pi$  correspond aux deux côtés de la fissure. De même,  $(r_0, \theta_0)$  désignent les coordonnées polaires locales en  $\mathbf{x}_0$  dans  $\Omega_e$  avec la convention que  $\theta_0 = 0$  correspond à  $\Gamma_0^-$ .

#### Théorème 4.3. [Décomposition de $\mathbf{X}_\alpha(\Omega)$ ]

Soit  $0 < \alpha < 1/2$ . Soient les fonctions singulières  $S^*$  et  $S_0$  définies en coordonnées polaires locales par

$$S^*(r^*, \theta^*) = (r^*)^{1/2} \sin \frac{\theta^*}{2} \quad (4.23)$$

et

$$S_0(r_0, \theta_0) = \frac{\theta_0}{\pi}. \quad (4.24)$$

Tout champ  $\mathbf{v} \in \mathbf{X}_\alpha(\Omega)$  admet une décomposition

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} + c^* \nabla (\eta^* S^*) + c_0 \nabla (\eta_0 S_0) \quad (4.25)$$

avec un champ  $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_c, \mathbf{w}_e) \in \mathbf{H}^1(\Omega_c) \times \mathbf{H}^1(\Omega_e)$  régulier par morceaux,  $c^*$  et  $c_0$  des scalaires complexes et  $\eta^*$  (resp.  $\eta_0$ ) une fonction de troncature par rapport au fond de fissure  $\mathbf{x}^*$  (resp. à l'embouchure  $\mathbf{x}_0$ ) définie sur  $\Omega_c$  (resp. sur  $\Omega_e$ ).

La décomposition dépend de façon continue du champ  $\mathbf{v}$  et nous avons les estimations

$$\|\mathbf{w}_c\|_{1,\Omega_c} + |c^*| \lesssim \|\text{curl } \mathbf{v}_c\|_{0,\Omega_c} + \|\text{div } \mathbf{v}_c\|_{0,\Omega_c} \quad (4.26)$$

et

$$\|\mathbf{w}_e\|_{\mathcal{H}(\text{curl}, \text{div } \varepsilon; \Omega_e)} + |c_0| \lesssim \|\mathbf{v}_c\|_{\mathcal{H}(\text{curl}; \Omega_c)} + \|\text{curl } \mathbf{v}_e\|_{0,\Omega_e} + \|\text{div } \mathbf{v}_e\|_{0,\Omega_e} + \sum_{j=0}^J |\langle \gamma_n \mathbf{v}_e, \mathbf{1} \rangle_{\Gamma_j}|. \quad (4.27)$$

□

**Les idées principales de la preuve :** La décomposition de  $\mathbf{v}_c$  dans  $\Omega_c$  s'obtient par des résultats classiques comme au Théorème 4.1. Le comportement asymptotique de  $\mathbf{v}_c$  au voisinage de l'embouchure est donné par les singularités du Laplacien avec condition de Neumann. Puisque l'angle entre la fissure et le bord  $\Gamma_0$  (ou sa tangente en  $\mathbf{x}_0$ ) est inférieur à  $\pi$ ,  $\mathbf{v}_c$  appartient à  $\mathbf{H}^1$  au voisinage de  $\mathbf{x}_0$ .

La décomposition de  $\mathbf{v}_e$  est moins standard. Notons tout d'abord que le bord de  $\Omega_e$  est régulier d'après les hypothèses sur la géométrie. La seule singularité se situe alors en  $\mathbf{x}_0$ . Afin d'en établir une forme explicite, nous écrivons dans un premier temps la décomposition de Helmholtz de  $\mathbf{v}_e$ . Pour cela, remarquons que  $\mathbf{v}_e$  appartient à l'espace à poids  $\mathbf{L}_\alpha^2(\Omega_e)$  qui s'injecte de façon continue dans  $\mathbf{L}^p(\Omega_e)$  quel que soit  $p \in [1, \frac{2}{\alpha+1}[$ . Or, d'après les travaux d'Amrouche et al. [10], l'existence d'une décomposition de Helmholtz habituellement démontrée dans  $\mathbf{L}^2(\Omega_e)$  peut également être obtenue dans le cadre des espaces  $\mathbf{L}^p(\Omega_e)$  quel que soit  $p \geq 1$ . Ainsi  $\mathbf{v}_e$  s'écrit

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{curl} \psi_{e,r} + \nabla \varphi_e \quad (4.28)$$

avec  $\psi_{e,r} \in H^2(\Omega_e)$  tel que  $\gamma_0 \psi_{e,r} = 0$  sur  $\Gamma_0$ ,  $\gamma_0 \psi_{e,r} = \text{const.}$  sur  $\Gamma_j$ ,  $1 \leq j \leq J$ , et  $\varphi_e \in W_{0,\Gamma_\infty}^{1,p}(\Omega_e)$ . On montre ensuite que  $\varphi_e$  est solution d'un problème du type

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta \varphi_e = f & \text{in } \Omega_e \\ \varphi_e = 0 & \text{on } \Gamma_\infty \\ \varphi_e = g_0 + d_0 & \text{on } \Gamma_0^0 \\ \varphi_e = g_j + d_j & \text{on } \Gamma_j \forall 1 \leq j \leq J \\ \langle \partial_n \varphi_e, \mathbf{1} \rangle_{\Gamma_j} = b_j & \forall 0 \leq j \leq J, \end{array} \right. \quad (4.29)$$

avec  $f \in L^2(\Omega_e)$ ,  $g_0 \in H^{3/2}(\Gamma_0^0)$ ,  $g_j \in H^{3/2}(\Gamma_j)$  ( $j \geq 1$ ), et  $b_j \in \mathbb{C}$ . La présence des constantes  $d_j$  indique que la condition aux limites  $\varphi_e = g_j$  est vérifiée à une constante additive près. La régularité  $H^{3/2}$  sur l'interface  $\Gamma$  en dehors de l'embouchure  $\mathbf{x}_0$  s'obtient par la régularité de  $\mathbf{v}_c$  dans  $\Omega_c$  et la continuité de la trace tangentielle loin de  $\mathbf{x}_0$  du fait que  $\mathbf{curl} \mathbf{v}$  appartient à  $L^2$  globalement sur tout le domaine  $\Omega$ . On note que les données du problème (4.29) sont régulières sauf en  $\mathbf{x}_0$ . Mais, comme  $H^{3/2}(\Gamma_0^\pm)$  s'injecte de façon continue dans  $C^0(\overline{\Gamma_0^\pm})$ , le saut de  $g_0$  en  $\mathbf{x}_0$  est bien défini. La dernière étape consiste alors à exhiber la singularité de  $\varphi_e$  en  $\mathbf{x}_0$ . Pour cela, remarquons que la fonction singulière  $S_0$  définie par (4.24) appartient à  $H^{1,\alpha}(\Omega_e)$  et est solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}_-^2, \\ u(\xi, 0) = 1 & \text{si } \xi > 0, \\ u(\xi, 0) = 0 & \text{si } \xi < 0 \end{array} \right.$$

dans le demi-espace  $\mathbb{R}_-^2$ . On en déduit l'existence d'une constante  $c_0 \in \mathbb{C}$  telle que  $\varphi_e - c_0 \nabla(\eta_0 S_0)$  est régulière ce qui démontre le résultat.  $\blacksquare$

La formulation variationnelle en champ électrique est maintenant donnée sur le sous-espace de  $\mathbf{X}_\alpha(\Omega)$ ,

$$\mathbf{Y}_\alpha(\Omega) = \{ \mathbf{v} \in \mathbf{X}_\alpha(\Omega) \mid \langle \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{n}, \mathbf{1} \rangle_{\Gamma_j} = 0 \forall 0 \leq j \leq J \}, \quad (4.30)$$

par

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{E} \in \mathbf{Y}_\alpha(\Omega) \text{ tel que pour tout } \mathbf{v} \in \mathbf{Y}_\alpha(\Omega) \\ \int_\Omega \mu^{-1} \mathbf{curl} \mathbf{E} \mathbf{curl} \bar{\mathbf{v}} dx + \int_{\Omega_c} \text{div} \mathbf{E}_c \text{div} \bar{\mathbf{v}}_c dx + \int_{\Omega_e} \text{div} \mathbf{E}_e \text{div} \bar{\mathbf{v}}_e dx \\ + i\omega \int_{\Omega_c} \sigma_c \mathbf{E}_c \cdot \bar{\mathbf{v}}_c dx = -i\omega \int_\Omega \mathbf{J} \cdot \bar{\mathbf{v}} dx. \end{array} \right. \quad (4.31)$$

Notons qu'il s'agit d'une formulation *régularisée* puisque les contraintes de divergence nulle se traduisent par la présence des termes  $(\text{div} \cdot, \text{div} \cdot)$  au lieu d'être contenues dans l'espace variationnel. En adaptant des techniques de [46] au cas d'un domaine avec fissure, nous obtenons le

**Théorème 4.4. [Existence et unicité pour le problème en champ électrique]**

Soit  $\mathbf{J} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  tel que  $\operatorname{div} \mathbf{J}_s = 0$  dans  $\Omega$  et  $\operatorname{supp}(\mathbf{J}) \subset \Omega_e$ . Soit  $0 < \alpha < 1/2$ . Alors le problème (4.31) admet une unique solution  $\mathbf{E}$  qui est à divergence nulle dans  $\Omega_e$  et dans  $\Omega_c$ . □

**4.4.3 La formulation  $\mathbf{A} - \psi$  en potentiels combinés**

La formulation en champ électrique ne se prête pas facilement à une discrétisation par éléments finis. En effet, le problème régularisé (4.31) nécessiterait l'utilisation d'une méthode d'éléments finis nodaux qui, en présence de singularités géométriques, ne permettent pas d'approcher la solution physique du problème comme on a pu le voir au chapitre 2. Quant à une discrétisation du champ électrique par éléments finis d'arête, elle s'avère problématique en vue des contraintes de divergence. Il est alors souvent préférable de choisir une formulation basée sur la décomposition des champs en potentiels. Dans cette section, nous présentons la formulation  $(\mathbf{A}, \psi)$  qui est basée sur une décomposition du champ électrique.

Pour cela, rappelons que l'induction magnétique  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$  est à divergence nulle (cf. (1.1d)) et que sa composante normale est continue à travers la fissure d'après [23]. On en déduit que  $\mathbf{B}$  est à divergence nulle dans le domaine non fissuré  $Q$ , et il existe un potentiel vecteur  $\mathbf{A} \in \mathcal{H}_0(\operatorname{curl}; Q)$  tel que

$$\mathbf{B} = \operatorname{curl} \mathbf{A} \text{ dans } Q. \quad (4.32)$$

Reportant cette expression dans la loi de Faraday (4.13b), on obtient

$$\operatorname{curl}(\mathbf{E} + i\omega \mathbf{A}) = 0 \text{ dans } \Omega$$

du fait que  $\mathbf{E}$  est à rotationnel dans  $L^2(\Omega)$ . Or, le domaine  $\Omega$  n'est pas simplement connexe et l'existence d'un potentiel scalaire nécessite quelques commentaires. La technique habituelle (cf. [9] par exemple) consiste à introduire des "coupures"  $\Sigma_j$ , de sorte que le domaine  $\Omega^0 = \Omega \setminus \cup_j \Sigma_j$  soit simplement connexe. Ici, une seule coupure  $\Sigma_0$  est suffisante, et on peut supposer que la fissure  $\Sigma$  et la coupure  $\Sigma_0$  ont comme point commun l'embouchure  $\mathbf{x}_0$ . D'après les résultats du paragraphe précédent, nous savons que  $\mathbf{E}_c \in \mathbf{L}^2(\Omega_c)$  et  $\mathbf{E}_e \in \mathbf{L}^p(\Omega_e)$  pour  $1 \leq p < \frac{2}{\alpha+1}$ . La décomposition de Helmholtz pour des champs de  $\mathbf{L}^p$  (cf. [10]) s'écrit

$$\mathbf{E} = -i\omega (\mathbf{A} + \nabla \psi) \quad (4.33)$$

dans le domaine  $\Omega^0$  où  $\psi \in L^2(\Omega)$  est tel que  $\psi_c \in H^1(\Omega_c)$  et  $\psi_e \in W^{1,p}(\Omega_e)$ . En vue de la condition aux limites vérifiée par  $\mathbf{E}$  et par  $\mathbf{A}$  sur  $\Gamma_\infty$ , on peut choisir  $\psi$  tel que  $\psi = 0$  sur  $\Gamma_\infty \setminus \Sigma_0$ . Mais  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{A}$  appartiennent à  $\mathcal{H}(\operatorname{curl}; \Omega \setminus \mathcal{V}(\mathbf{x}_0))$  en dehors d'un voisinage  $\mathcal{V}(\mathbf{x}_0)$  de l'embouchure  $\mathbf{x}_0$ , et leur trace tangentielle est donc continue à travers la coupure  $\Sigma_0$  loin de  $\mathbf{x}_0$ . Par conséquent, les traces de  $\psi$  de part et d'autre de  $\Sigma_0$  diffèrent seulement d'une constante et cette constante est nulle puisque  $\psi = 0$  sur  $\Gamma_\infty \setminus \Sigma_0$ . En tenant compte des résultats du paragraphe précédent, le potentiel scalaire  $\psi$  appartient à l'espace

$$S_\alpha(\Omega) = \{ \varphi \in L^2(\Omega) \mid \varphi_c \in H^1(\Omega_c); \varphi_e \in H^{1,\alpha}(\Omega_e); \varphi_c - \varphi_e = \text{const. sur } \Gamma \setminus \{\mathbf{x}_0\}; \varphi_e = 0 \text{ sur } \Gamma_\infty \},$$

et la décomposition (4.33) est valable sur  $\Omega$  au lieu de  $\Omega^0$ .

On obtient alors la formulation  $(\mathbf{A}, \psi)$  en reportant (4.33) dans (4.13a) avec la loi d'Ohm :

$$\operatorname{curl} \mu^{-1} \operatorname{curl} \mathbf{A} + i\omega \sigma (\mathbf{A} + \nabla \psi) = \mathbf{J}_s \text{ dans } \Omega, \quad (4.34a)$$

$$i\omega \operatorname{div}(\sigma (\mathbf{A} + \nabla \psi)) = 0 \text{ dans } \Omega_c \quad (4.34b)$$

où (4.34b) exprime la conservation des charges,  $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$ . Les équations (4.34a) et (4.34b) ne définissent le potentiel scalaire  $\psi$  que dans le conducteur  $\Omega_c$  ce qui est suffisant pour une simulation des courants de Foucault.

Afin de garantir l'unicité des potentiels  $\mathbf{A}$  et  $\psi$ , nous rajoutons les conditions de jauge suivantes :

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \text{ dans } Q, \text{ et } \int_{\Omega_c} \psi_c \, dx = 0. \quad (4.35)$$

La condition sur  $\mathbf{A}$  est la jauge de Coulomb, celle sur  $\psi$  permet de fixer la constante du potentiel scalaire.

La formulation variationnelle du problème (4.34) est maintenant donnée sur l'espace  $V = \mathbf{X}^0(Q) \times U^0(\Omega_c)$  qui contient les conditions de jauge. Plus précisément, nous posons

$$\mathbf{X}^0(Q) = \{ \mathbf{v} \in \mathcal{H}_0(\operatorname{curl}; Q) \mid (\mathbf{v}, \nabla \xi) = 0 \, \forall \xi \in H_0^1(Q) \} \quad (4.36)$$

et

$$U^0(\Omega_c) = \left\{ \varphi \in H^1(\Omega_c) \mid \int_{\Omega_c} \varphi \, dx = 0 \right\}. \quad (4.37)$$

En tenant compte des conditions aux limites  $\mathbf{A} \times \mathbf{n} = 0$  sur  $\Gamma_\infty$  et  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = 0$  sur  $\Gamma$ , il s'agit alors de

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{A}, \psi) \in \mathbf{X}^0(Q) \times U^0(\Omega_c) \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \mu^{-1} \operatorname{curl} \mathbf{A} \operatorname{curl} \overline{\mathbf{A}'} \, dx + i\omega \int_{\Omega_c} \sigma_c(\mathbf{A} + \nabla \psi) \cdot \overline{\mathbf{A}'} \, dx = \int_{\Omega_e} \mathbf{J}_s \cdot \overline{\mathbf{A}'} \, dx, \quad \forall \mathbf{A}' \in \mathbf{X}^0(Q), \\ i\omega \int_{\Omega_c} \sigma_c(\mathbf{A} + \nabla \psi) \cdot \nabla \overline{\psi'} \, dx = 0, \quad \forall \psi' \in U^0(\Omega_c). \end{array} \right. \quad (4.38)$$

On montre par un raisonnement similaire à celui dans [48] où la formulation  $\mathbf{A} - \psi$  a été étudiée pour un domaine sans fissure, que (4.38) admet une unique solution. Par ailleurs, on peut construire une extension de  $\psi$  à  $\Omega_e$  en résolvant un problème scalaire de sorte que le champ  $\mathbf{E} = -i\omega(\mathbf{A} + \psi)$  soit la solution du problème (4.31) en champ électrique. D'après les remarques en début de ce paragraphe, on déduit alors que les formulations (4.31) et (4.38) sont équivalentes.

La discrétisation des conditions de jauge est en général une question délicate. Le résultat du théorème suivant revêt alors une importance particulière car il assure que la solution  $(\mathbf{A}, \psi)$  du problème jaugé est une solution du problème non jaugé. Par conséquent, ce dernier admet au moins une solution, et seule l'unicité n'est pas assurée.

**Théorème 4.5. [Existence d'une solution du problème sans jauge]**

*Supposons que  $\mathbf{J}_s$  satisfait les conditions (4.14). Soit  $(\mathbf{A}, \psi) \in V$  la solution de (4.38). Alors,*

$$\int_{\Omega} \mu^{-1} \operatorname{curl} \mathbf{A} \operatorname{curl} \overline{\mathbf{A}'} \, dx + i\omega \int_{\Omega_c} \sigma_c(\mathbf{A} + \nabla \psi) \cdot \overline{\mathbf{A}'} \, dx = \int_{\Omega_e} \mathbf{J}_s \cdot \overline{\mathbf{A}'} \, dx, \quad (4.39)$$

*quel que soit  $\mathbf{A}' \in \mathcal{H}_0(\operatorname{curl}; Q)$ . De même,*

$$\int_{\Omega_c} \sigma_c(\mathbf{A} + \nabla \psi) \cdot \nabla \overline{\psi'} = 0 \quad (4.40)$$

*quel que soit  $\psi' \in H^1(\Omega_c)$ . □*

La démonstration du Théorème 4.5 repose essentiellement sur la décomposition de Helmholtz des champs de  $\mathcal{H}_0(\operatorname{curl}; Q)$  qui est classique. Notons que les mêmes arguments que dans [48] s'appliquent car  $\mathbf{A}$  est indépendant de la fissure.

#### 4.4.4 Discrétisation par éléments finis étendus

Dans cette section, nous discutons la discrétisation de la formulation  $\mathbf{A} - \psi$  par une méthode d'éléments finis étendus.

Soit alors  $\mathcal{T}_h$  une triangulation du domaine non fissuré  $Q$ . Nous supposons que la triangulation respecte la partition  $(Q_c, Q_e)$  de  $Q$  de sorte que pour tout élément  $K \in \mathcal{T}_h$  on ait, soit  $K \subset \overline{Q_c}$ , soit  $K \subset \overline{Q_e}$ . Notons que le domaine de la configuration 4.11 n'est pas polygonal. Il ne peut donc être recouvert de façon exacte par les éléments de  $\mathcal{T}_h$ . Néanmoins, l'approximation de la géométrie par des triangles est du même ordre que l'erreur de discrétisation puisque nous utilisons des éléments finis de degré 1. Pour simplifier les notations, nous ne distinguons donc pas le domaine discret et le domaine physique.

Soit  $\mathcal{E}$  l'ensemble des arêtes de la triangulation  $\mathcal{T}_h$  et  $\mathcal{N}$  l'ensemble de ses nœuds. Puisque le potentiel scalaire est défini seulement dans le conducteur, nous introduisons l'ensemble  $\mathcal{N}_c = \mathcal{N} \cap \overline{Q_c}$ . Rappelons que selon le principe des éléments finis étendus, le maillage est indépendant de la fissure et d'éventuelles discontinuités des champs seront prises en compte dans l'espace de discrétisation.

D'après la section 4.4.3, le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  est défini sur  $Q$  et ne dépend pas de la fissure  $\Sigma$ . Nous choisissons alors de le discrétiser par éléments finis d'arête classiques,

$$\mathbf{A}_h(\mathbf{x}) = \sum_{e \in \mathcal{E}} A_e \mathbf{w}_e(\mathbf{x}), \quad (4.41)$$

avec  $A_e \in \mathbb{C}$ .

Cependant, le potentiel scalaire  $\psi$  est discontinu à travers la fissure et présente une singularité de type  $r^{1/2}$  au voisinage du fond de fissure  $\mathbf{x}^*$ . Pour  $\psi$ , nous mettons alors en place une méthode d'éléments finis étendus basée sur les nœuds du maillage.

Introduisons dans un premier temps l'ensemble  $\mathcal{N}_{c,H}$  des nœuds *enrichis situés dans  $Q_c$* . Conformément aux travaux de Moës et al. [82] qui ont été à l'origine des méthodes XFEM, un nœud  $M_I$  est enrichi si le support de la fonction de forme  $w_I$  associée est traversé par la fissure. Ici, les fonctions  $(w_I)_{I \in \mathcal{N}_c}$  sont définies de manière usuelle par

$$\begin{cases} w_I(M_J) = \delta_{IJ} \quad \forall J \in \mathcal{N}_c \\ w_I|_K \in \mathbb{P}_1(K) \quad \forall K \subset \overline{Q_c}. \end{cases}$$

Soit  $H$  la fonction de type Heaviside relative à la fissure (cf. (4.3)) et  $S^*$  la fonction singulière (4.23) au fond de fissure. On cherche le potentiel scalaire discret  $\psi_h$  sous la forme

$$\psi_h(\mathbf{x}) = \sum_{I \in \mathcal{N}_{c,H}} \psi_I w_I(\mathbf{x}) + \sum_{I \in \mathcal{N}_{c,H}} \psi_I^H (H w_I)(\mathbf{x}) + \psi^* \eta^* S^*(\mathbf{x}) \quad (4.42)$$

avec  $\psi_I, \psi_I^H$  et  $\psi^*$  dans  $\mathbb{C}$ , et  $\eta^*$  une fonction de troncature localisée en  $\mathbf{x}^*$ . Notons  $U_h^{\text{XFEM}}(\Omega_c)$  l'espace de discrétisation pour  $\psi_h$  qui est conforme dans  $H^1(\Omega_c)$  :

$$U_h^{\text{XFEM}}(\Omega_c) = \text{Vect}(w_I, M_I \in \mathcal{N}_c) \oplus \text{Vect}(H w_I, M_I \in \mathcal{N}_{c,H}) \oplus \text{Vect}(\nabla(\eta^* S^*)). \quad (4.43)$$

Le problème discret n'admet une solution unique que si l'on rajoute des conditions de jauge. Pour le potentiel scalaire, nous choisissons comme pour le problème continu les fonctions à moyenne nulle,

$$U_h^{\text{XFEM},0}(\Omega_c) = \left\{ \varphi_h \in U_h^{\text{XFEM}}(\Omega_c) \mid \int_{\Omega_c} \varphi \, dx = 0 \right\}.$$

L'unicité du potentiel vecteur  $\mathbf{A}_h$  est assurée par une condition de "divergence discrète nulle" :

$$V_h^{\text{edge},0}(Q) = \left\{ \mathbf{v}_h \in V_h^{\text{edge}}(Q) \mid (\mathbf{v}_h, \nabla \xi_h) = 0 \quad \forall \xi_h \in S_h(Q) \right\}$$

où  $S_h(Q)$  désigne l'espace de discrétisation par éléments finis de Lagrange de type P1,

$$S_h(Q) = \left\{ \xi_h \in H_0^1(Q) \mid \xi_h|_K \in \mathbb{P}_1(K) \right\}.$$

Le problème discret *avec condition de jauge* consiste à

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{A}_h, \psi_h) \in V_h^{\text{edge},0}(Q) \times U_h^{\text{XFEM},0}(\Omega_c) \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \mu^{-1} \text{curl } \mathbf{A}_h \text{ curl } \overline{\mathbf{A}'_h} \, dx + i\omega \int_{\Omega_c} \sigma_c(\mathbf{A}_h + \nabla\psi_h) \cdot \overline{\mathbf{A}'_h} \, dx = \int_Q \mathbf{J}_s \cdot \overline{\mathbf{A}'_h} \, dx, \\ \forall \mathbf{A}'_h \in V_h^{\text{edge},0}(Q), \\ i\omega \int_{\Omega_c} \sigma_c(\mathbf{A}_h + \nabla\psi_h) \cdot \nabla \overline{\psi'_h} \, dx = 0, \\ \forall \psi'_h \in U_h^{\text{XFEM},0}(\Omega_c). \end{array} \right. \quad (4.44)$$

Ici encore, les arguments de [48] s'appliquent pour montrer l'existence et l'unicité d'une solution de (4.44) puisque le potentiel vecteur discret  $\mathbf{A}_h$  est recherché dans le même espace de discrétisation que pour un problème sans fissure.

Les espaces  $V_h^{\text{edge},0}(Q)$  et  $U_h^{\text{XFEM},0}(\Omega_c)$  ne se prêtent pas facilement à une implémentation du problème discret, même si différentes conditions de jauge discrètes ont été expérimentées [1, 81, 2]. De l'autre côté, si on considère le problème discret *sans jauge*, la difficulté consiste à montrer que le second membre appartient effectivement à l'image de la matrice du système sans quoi l'existence d'une solution n'est pas garantie. Ici, nous surmontons cette difficulté par une implémentation astucieuse du terme de source d'après une idée de [100] pour le problème de la magnétostatique.

En effet, le champ  $\mathbf{J}_s$  étant à divergence nulle, il existe un potentiel  $T_0$  (scalaire dans la configuration 2D) tel que  $\mathbf{J}_s = \mathbf{curl} T_0$ . Par intégration par parties, nous obtenons

$$\int_{Q_e} \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{A}'_h \, dx = \int_Q T_0 \text{curl } \mathbf{A}'_h \, dx \quad (4.45)$$

pour tout champ discret  $\mathbf{A}'_h$  dans l'espace discret *sans jauge*  $V_h^{\text{edge}}$ .

La proposition 4.1 ci-dessous stipule que la solution  $(\mathbf{A}_h, \psi_h)$  du problème (4.44) satisfait les équations variationnelles pour tout champ  $(\mathbf{A}'_h, \psi'_h)$  dans l'espace  $V_h^{\text{edge}}(Q) \times U_h^{\text{XFEM}}(\Omega_c)$ . Ceci montre que le problème discret *sans condition de jauge* admet au moins une solution.

**Proposition 4.1.**

Soit  $(\mathbf{A}_h, \psi_h) \in V_h^{\text{edge},0}(Q) \times U_h^{\text{XFEM},0}(\Omega_c)$  la solution du problème discret (4.44) avec conditions de jauge. Alors

$$\int_{\Omega} \mu^{-1} \text{curl } \mathbf{A}_h \text{ curl } \overline{\mathbf{A}'_h} \, dx + i\omega \int_{\Omega_c} \sigma_c(\mathbf{A}_h + \nabla\psi_h) \cdot \overline{\mathbf{A}'_h} \, dx = \int_Q T_0 \text{curl } \overline{\mathbf{A}'_h} \, dx, \quad (4.46)$$

quel que soit  $\mathbf{A}'_h \in V_h^{\text{edge}}(Q)$ , et

$$i\omega \int_{\Omega_c} \sigma_c(\mathbf{A}_h + \nabla\psi_h) \cdot \nabla \overline{\psi'_h} \, dx = 0, \quad (4.47)$$

quel que soit  $\psi'_h \in U_h^{\text{XFEM}}(\Omega_c)$ . □

**Preuve:** Il est évident que l'équation (4.47) est vérifiée pour tout  $\psi'_h \in U_h^{\text{XFEM}}(\Omega_c)$  puisque le potentiel scalaire n'intervient qu'à travers son gradient.

Pour montrer (4.46), considérons un champ test  $\mathbf{A}'_h \in V_h^{\text{edge}}(Q)$ . D'après la décomposition de Helmholtz discrète,  $\mathbf{A}'_h$  se décompose en

$$\mathbf{A}'_h = \tilde{\mathbf{A}}'_h + \nabla \tau'_h$$

avec un champ  $\tilde{\mathbf{A}}'_h \in V_h^{\text{edge},0}(Q)$  qui satisfait la condition de jauge et  $\tau'_h \in S_h(Q)$ . En insérant cette décomposition dans le membre de gauche de l'équation (4.46), il vient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mu^{-1} \text{curl } \mathbf{A}_h \text{curl } \overline{\mathbf{A}}'_h \, dx + i\omega \int_{\Omega_c} \sigma_c(\mathbf{A}_h + \nabla\psi_h) \cdot \overline{\mathbf{A}}'_h \, dx \\ &= \int_{\Omega} \mu^{-1} \text{curl } \mathbf{A}_h \text{curl } \overline{\tilde{\mathbf{A}}}'_h \, dx + i\omega \int_{\Omega_c} \sigma_c(\mathbf{A}_h + \nabla\psi_h) \cdot \overline{(\tilde{\mathbf{A}}'_h + \nabla\tau'_h)} \, dx \\ &= \int_{\Omega} \mu^{-1} \text{curl } \mathbf{A}_h \text{curl } \overline{\tilde{\mathbf{A}}}'_h \, dx + i\omega \int_{\Omega_c} \sigma_c(\mathbf{A}_h + \nabla\psi_h) \cdot \overline{\tilde{\mathbf{A}}}'_h \, dx \end{aligned}$$

puisque la restriction de  $\tau'_h$  à  $\Omega_c$  appartient à l'espace des éléments finis enrichis  $U_h^{\text{XFEM}}(\Omega_c)$  et convient donc comme fonction test dans (4.47). Ainsi, le terme impliquant  $\nabla\tau'_h$  s'annule. Comme  $\tilde{\mathbf{A}}'_h$  satisfait la condition de jauge discrète, on déduit de (4.44) que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mu^{-1} \text{curl } \mathbf{A}_h \text{curl } \overline{\tilde{\mathbf{A}}}'_h \, dx + i\omega \int_{\Omega_c} \sigma_c(\mathbf{A}_h + \nabla\psi_h) \cdot \overline{\tilde{\mathbf{A}}}'_h \, dx \\ &= \int_Q \mathbf{J}_s \cdot \overline{\tilde{\mathbf{A}}}'_h \, dx = \int_Q T_0 \text{curl } \overline{\tilde{\mathbf{A}}}'_h \, dx = \int_Q T_0 \text{curl } \overline{\mathbf{A}}'_h \, dx \end{aligned}$$

ce qui montre (4.47). ■

Il convient de noter l'importance d'implémenter le second membre sous la forme (4.45) car elle garantit l'existence d'une solution du problème sans condition de jauge. En effet, nous avons vu au cours de la démonstration de la Proposition 4.1 que

$$\int_Q T_0 \text{curl } \overline{\tilde{\mathbf{A}}}'_h \, dx = \int_Q T_0 \text{curl } \overline{(\mathbf{A}'_h - \nabla\tau'_h)} \, dx = \int_Q T_0 \text{curl } \overline{\mathbf{A}}'_h \, dx$$

puisque  $\text{curl } \nabla\tau'_h = 0$ . Par contre, si l'on gardait l'expression de  $\mathbf{J}_s$  dans le second membre, on aurait

$$\int_{Q_e} \mathbf{J}_s \cdot \overline{\tilde{\mathbf{A}}}'_h \, dx = \int_{Q_e} \mathbf{J}_s \cdot \overline{(\mathbf{A}'_h - \nabla\tau'_h)} \, dx$$

et le terme impliquant  $\nabla\tau'_h$  ne s'annulerait en général pas car  $\mathbf{J}_s$  n'est pas *numériquement* à divergence nulle due à des effets d'intégration numérique, par exemple. Par conséquent, le second membre du système linéaire  $\mathbb{A}X = F$  résultant ne serait pas dans l'image de la matrice ce qui conduirait à un résidu constant dans l'utilisation de méthodes de résolution itératives. Ce phénomène a été observé par Ren dans [100] pour un problème de magnéto-statique. Notons aussi que l'utilisation de méthodes directes comme la factorisation LU est exclue puisque la matrice  $\mathbb{A}$  n'est pas inversible. En revanche, on montre sans difficulté qu'une méthode itérative comme le gradient conjugué est bien définie puisque à chaque étape, le résidu  $r^{(k)} = F - \mathbb{A}X^{(k)}$  reste dans l'image de  $\mathbb{A}$  pourvu que  $F$  s'y trouve. La méthode converge alors sous les conditions habituelles. On peut toutefois remarquer que la matrice  $\mathbb{A}$  est symétrique à coefficients complexes, mais pas hermitienne. Des méthodes de type gradient conjugué ont été développées pour de telles matrices [55].

Les résultats numériques ci-dessous ont été obtenus pour une configuration circulaire comme celle de la Figure 4.11 avec un conducteur d'un diamètre de 10mm, une bobine de largeur 4mm située à une distance de 1mm du conducteur et finalement un bord extérieur  $\Gamma_{\infty}$  fixé à  $r = 18\text{mm}$ . Nous avons simulé les courants de Foucault pour une fréquence  $f = 50\text{kHz}$  et une conductivité  $\sigma_c = 10^6\text{S/m}$ . Le potentiel  $T_0$  qui permet de simuler la bobine peut être déterminé de façon exacte et s'écrit

$$T_0(r) = \begin{cases} I & \text{si } r \leq r_1, \\ I \frac{r_2 - r}{r_2 - r_1} & \text{si } r_1 \leq r \leq r_2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

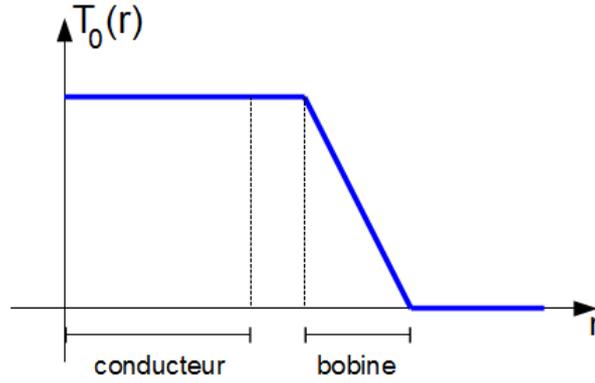


FIGURE 4.12 – Potentiel du terme source.

Ici,  $r_1$  et  $r_2$  désignent respectivement le rayon intérieur et extérieur de la bobine (cf. Fig. 4.12).

Les Figures 4.13 et 4.14 représentent respectivement les parties réelle et imaginaire des courants de Foucault  $\mathbf{J}_h = -i\omega\sigma(\mathbf{A}_h + \nabla\psi_h)$  dans le conducteur et au voisinage de la fissure. On observe que les lignes de courant tournent autour de la fissure et sont par ailleurs concentrées sur le bord du conducteur. Ce phénomène, appelé *effet de peau*, caractérise tous les conducteurs parcourus par un courant alternatif. Sur les Figures 4.15 et 4.16 nous représentons l'amplitude  $\|\mathbf{J}_h\|$ . On voit clairement le comportement singulier au fond de fissure tandis que  $\mathbf{J}$  est régulier au voisinage de  $\mathbf{x}_0$ .

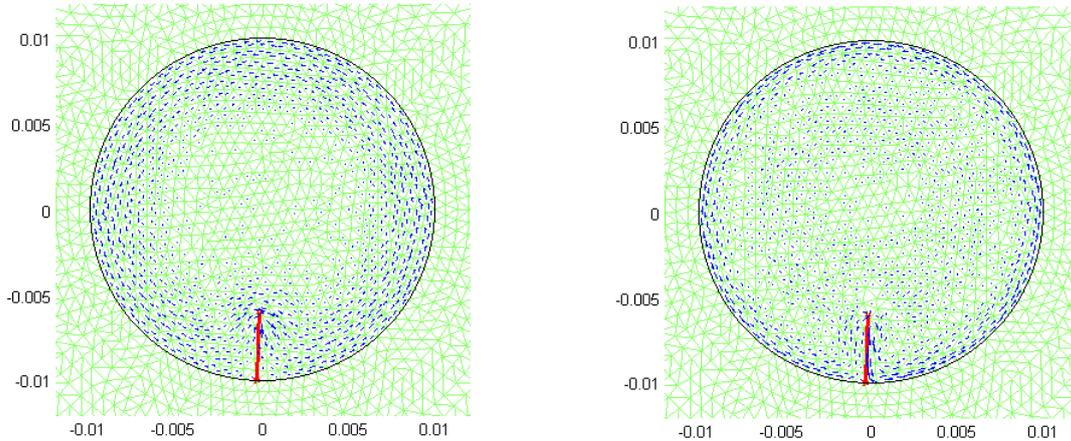


FIGURE 4.13 – Densité de courant dans le conducteur : parties réelle (gauche) et imaginaire (droite).

## 4.5 Conclusion et perspectives

L'utilisation de méthodes de type XFEM est une alternative intéressante aux méthodes classiques dans la simulation du champ électromagnétique en présence de fissures. En effet, construire des maillages d'un domaine fissuré reste une tâche difficile, en particulier dans le cas de géométries 3D. La méthode des éléments finis étendus permet de simplifier largement cette étape de maillage (ou remaillage) puisque seulement le domaine sans fissure sera maillé, la fissure elle-même étant prise en compte dans l'espace de discrétisation. Nous avons généralisé le concept des éléments finis étendus aux éléments finis d'arêtes ce qui ouvre un nouveau champ d'application de ce type de méthodes qui, jusqu'à présent, étaient plutôt limitées aux problèmes de la mécanique. Avec la

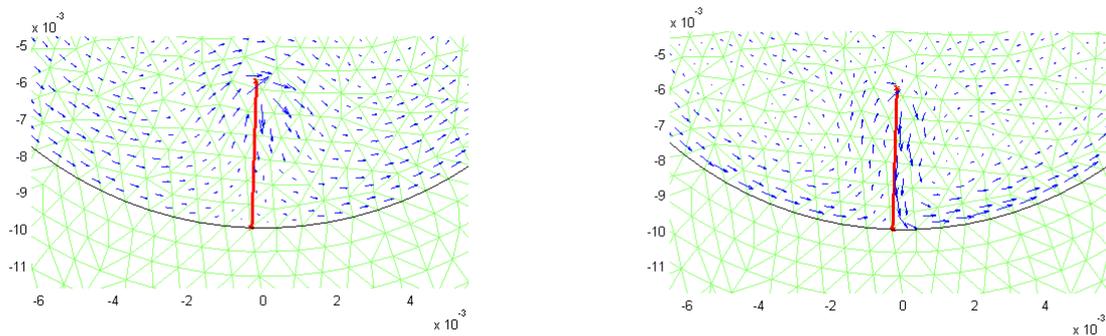


FIGURE 4.14 – Densité de courant au voisinage de la fissure : parties réelle (gauche) et imaginaire (droite).

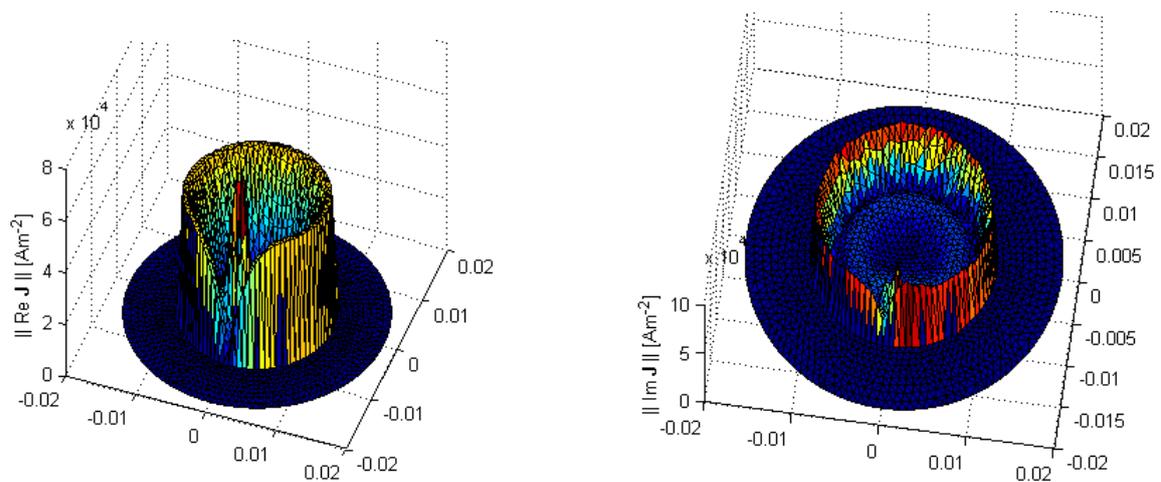


FIGURE 4.15 – Amplitude de la densité de courant : parties réelle (gauche) et imaginaire (droite).

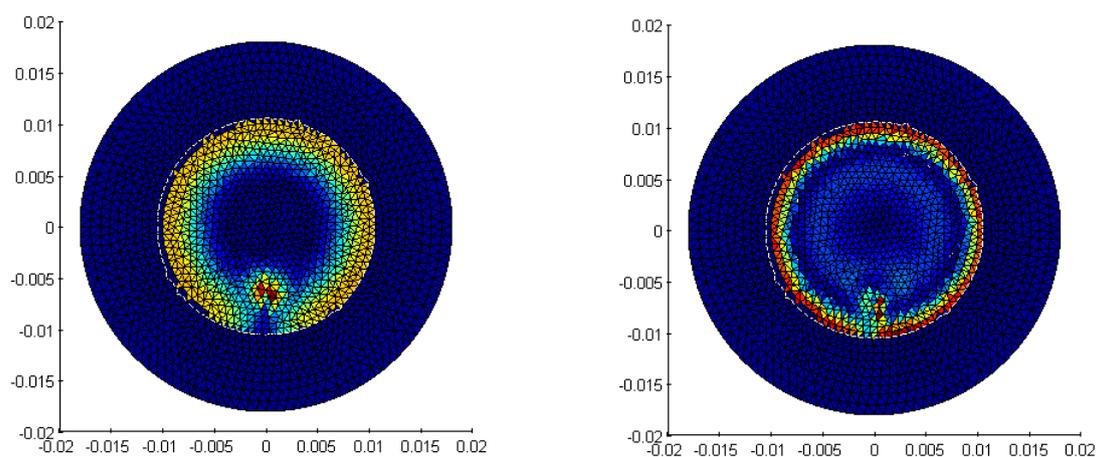


FIGURE 4.16 – Amplitude de la densité de courant (vue 2D) : parties réelle (gauche) et imaginaire (droite).

simulation du champ électromagnétique dans un dispositif de courants de Foucault, nous nous sommes tournés vers des applications en contrôle non destructif. Pour le moment, nous sommes

en mesure de localiser des fissures par algorithme génétique dans le cas du modèle simplifié qui ne modélise que le conducteur. Nos travaux actuels portent sur la localisation d'une fissure dans une configuration de CND réaliste qui comporte à la fois la pièce conductrice et le milieu extérieur qui contient la bobine. La résolution du problème direct par une méthode XFEM donne déjà des résultats satisfaisants, et l'inversion des données par algorithme génétique est en cours.



## Chapitre 5

# Identification et contrôlabilité

Ce chapitre résume mes travaux en collaboration avec M. Darbas et O. Goubet du LAMFA (Université de Picardie-Jules Verne, Amiens) dans le cadre du projet PINCEL du dispositif IndustriLab financé par la région Picardie sur la période 2011–2014 :

[DGL12] M. DARBAS, O. GOUBET ET S. LOHRENGEL, Exact boundary controllability of the second-order Maxwell system : theory and numerical simulation, *Comput. Math. Appl.* **63** (2012), pp. 1212–1237.

[DL14] M. DARBAS ET S. LOHRENGEL, Numerical reconstruction of small perturbations in the electromagnetic coefficients of a dielectric material, *J. Comput. Math.* **32** (2014), pp. 21–38.

### 5.1 Introduction

L’identification ou reconstruction de paramètres est un problème inverse que l’on rencontre dans de multiples applications. On peut penser par exemple à la tomographie par impédance électrique, une technique d’imagerie médicale par laquelle la conductivité du tissu humain est reconstruite à partir de mesures de courant prises à la surface du corps. De manière générale, il s’agit de détecter des perturbations dans les coefficients matériels (conductivité ou perméabilité) d’un matériau qui est homogène lorsqu’il est sain. Depuis une dizaine d’années, de nombreux travaux offrent un cadre mathématique rigoureux pour la résolution de ces problèmes inverses. Sur le plan théorique, l’approche de Ammari et al. [7, 8] consiste à établir des formules asymptotiques permettant la reconstruction des perturbations. Dans le cadre des équations de Maxwell harmoniques en temps, la mise en œuvre des méthodes de détection a été abordée par exemple par Volkov [103] et Asch et Mefire [12].

Ici, nous nous intéressons à la reconstruction de petits défauts d’homogénéité dans la perméabilité d’un matériau à partir de mesures dynamiques. Le modèle électromagnétique sous-jacent est donné par les équations de Maxwell instationnaires dans une formulation en champ électrique. La formule asymptotique qui est à la base de l’algorithme de reconstruction a été démontrée par Ammari dans [4].

L’identification de paramètres et la contrôlabilité sont *a priori* deux thématiques différentes. Si on les regroupe ici dans un même chapitre, c’est que la méthode de reconstruction que nous avons développée, repose de façon essentielle sur le calcul numérique de termes de contrôle. Plus précisément, nous abordons un problème de contrôlabilité exacte frontière : pour des conditions initiales et un temps final donnés, nous cherchons le contrôle agissant sur le bord du domaine qui amène le champ électrique à l’état d’équilibre au temps final. Le cadre fonctionnel pour la construction d’un tel contrôle est donné par la Hilbert Uniqueness Method (HUM) de J.-L. Lions [74].

Dans la section 5.2, nous rappelons les principes de la méthode HUM dans le cadre des équations de Maxwell instationnaires du second ordre. Nous discutons la mise en œuvre de la

méthode et donnons quelques exemples de calcul numérique du terme de contrôle. Dans §5.3, nous présentons l'algorithme de reconstruction à partir de la formule asymptotique de Ammari ainsi que quelques résultats numériques de reconstruction effective.

## 5.2 Contrôlabilité exacte frontière

Dans toute la suite, le domaine  $\Omega$  est un domaine régulier de  $\mathbb{R}^2$  ou de  $\mathbb{R}^3$  et nous notons  $\Gamma$  sa frontière. Le problème modèle est celui des équations de Maxwell instationnaires du second ordre en l'absence de terme source dans la formulation en champ électrique (1.8). Soit  $T > 0$  le temps final et  $\Gamma_0 \subset \Gamma$  une partie du bord de  $\Omega$ . On cherche le champ  $\mathbf{E}$  défini sur  $\Omega \times (0, T)$  tel que

$$\partial_t^2 \mathcal{E} + \operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathcal{E} = \mathbf{0}, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (5.1a)$$

$$\operatorname{div} \mathcal{E} = 0, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (5.1b)$$

$$\mathcal{E} \times \mathbf{n} = \mathcal{G}, \quad \text{sur } \Gamma_0 \times (0, T), \quad (5.1c)$$

$$\mathcal{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad \text{sur } (\Gamma \setminus \Gamma_0) \times (0, T), \quad (5.1d)$$

$$\mathcal{E}(\cdot, 0) = \mathbf{E}_0, \quad \partial_t \mathcal{E}(\cdot, 0) = \mathbf{E}_1, \quad \text{dans } \Omega. \quad (5.1e)$$

Les coefficients électromagnétiques du matériau sont donnés par  $\varepsilon = 1$ ,  $\mu = 1$  (pour simplifier la présentation) et  $\sigma = 0$ . Le problème de contrôlabilité exacte frontière que nous abordons dans cette section s'énonce alors comme suit :

$$(\mathcal{P}_{\text{control}}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Etant donnés un temps final } T > 0 \text{ et des conditions initiales } \{\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_1\}, \\ \text{trouver un champ } \mathcal{G} \text{ défini sur } \Gamma_0 \times (0, T) \text{ tel que} \\ \text{le champ électrique } \mathcal{E}, \text{ solution du problème (5.1) ci-dessus, vérifie} \\ \mathcal{E}(\cdot, T) = \partial_t \mathcal{E}(\cdot, T) = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega. \end{array} \right.$$

Tout champ  $\mathcal{G}$ , solution du problème  $(\mathcal{P}_{\text{control}})$ , est appelé un *contrôle qui amène le système (5.1) au repos*.

D'un point de vue mathématique, le système (5.1) est appelé exactement contrôlable à l'instant  $T$  si pour tout couple de données initiales  $\{\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_1\}$  dans un espace  $Y^{\text{HUM}}$  à préciser, on trouve un contrôle  $\mathcal{G}$ , solution de  $(\mathcal{P}_{\text{control}})$ . L'énoncé du problème de contrôlabilité amène plusieurs remarques. Tout d'abord, du fait de la vitesse finie de la propagation des ondes électromagnétiques, il est clair que le temps final doit être choisi suffisamment grand pour que  $(\mathcal{P}_{\text{control}})$  puisse avoir une solution. De même, la partie  $\Gamma_0$  du bord sur laquelle agit le contrôle doit répondre à certaines critères. En somme,  $T$  et  $\Gamma_0$  doivent être tels que tout rayon émanant d'un point  $\mathbf{x} \in \Omega$  en  $t = 0$  rencontre le bord  $\Gamma_0$  avant le temps final  $T$ . On dit alors que  $T$  et  $\Gamma_0$  contrôlent  $\Omega$  géométriquement dans le sens de Bardos, Lebeau et Rauch [18]. Notons également qu'il reste à préciser l'espace dans lequel sera pris le contrôle  $\mathcal{G}$  et par la suite, en quel sens  $\mathcal{E}$  est une solution de (5.1). En effet, la régularité du contrôle ne permettra pas, en général, la résolution de (5.1) au sens de la théorie variationnelle.

Le problème de la contrôlabilité exacte frontière des équations de Maxwell a été abordé d'abord par Lagnese [68] pour le système du premier ordre (1.6) en milieu homogène, puis généralisé aux matériaux composites par Nicaise [87]. Phung [91] a amélioré ces résultats en utilisant des outils de l'analyse microlocale. Nous avons adapté les résultats existants au problème des équations de Maxwell du second ordre en clarifiant le cadre fonctionnel de toutes les étapes conduisant à la construction de l'opérateur HUM. Ceci a abouti par la suite à une méthode de calcul effectif du terme de contrôle.

### 5.2.1 L'opérateur HUM

L'opérateur HUM, noté  $\Lambda$ , est défini à l'aide du problème adjoint de (5.1) et d'un problème auxiliaire qualifié de *rétrograde* pour lequel la direction du temps est inversée. Le problème adjoint s'écrit

$$\partial_t^2 \boldsymbol{\psi} + \operatorname{curl} \operatorname{curl} \boldsymbol{\psi} = \mathbf{0}, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (5.2a)$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\psi} = 0, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (5.2b)$$

$$\boldsymbol{\psi} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T), \quad (5.2c)$$

$$\boldsymbol{\psi}(\cdot, 0) = \boldsymbol{\psi}_0, \quad \partial_t \boldsymbol{\psi}(\cdot, 0) = \boldsymbol{\psi}_1, \quad \text{dans } \Omega \quad (5.2d)$$

pour des conditions initiales  $\{\boldsymbol{\psi}_0, \boldsymbol{\psi}_1\}$  données, tandis que le problème *rétrograde* consiste à trouver la solution de

$$\partial_t^2 \boldsymbol{\phi} + \operatorname{curl} \operatorname{curl} \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (5.3a)$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\phi} = 0, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (5.3b)$$

$$\boldsymbol{\phi} \times \mathbf{n} = \mathcal{G}, \quad \text{sur } \Gamma_0 \times (0, T), \quad (5.3c)$$

$$\boldsymbol{\phi} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad \text{sur } (\Gamma \setminus \Gamma_0) \times (0, T), \quad (5.3d)$$

$$\boldsymbol{\phi}(\cdot, T) = \mathbf{0}, \quad \partial_t \boldsymbol{\phi}(\cdot, T) = \mathbf{0}, \quad \text{dans } \Omega \quad (5.3e)$$

pour un champ  $\mathcal{G}$  donné sur  $\Gamma_0 \times (0, T)$ .

**Le problème adjoint (observation) :** Rappelons (cf. §1.3.2) que le problème (5.2) admet une unique solution

$$\boldsymbol{\psi} \in \mathcal{C}^0(0, T; \mathcal{H}_0(\operatorname{curl}; \Omega) \cap \mathcal{H}(\operatorname{div}^0, \Omega)) \cap \mathcal{C}^1(0, T; \mathcal{H}(\operatorname{div}^0, \Omega))$$

quel que soit le couple de données initiales  $\{\boldsymbol{\psi}_0, \boldsymbol{\psi}_1\} \in Y$  avec

$$Y = (\mathcal{H}_0(\operatorname{curl}; \Omega) \cap \mathcal{H}(\operatorname{div}^0; \Omega)) \times \mathcal{H}(\operatorname{div}^0; \Omega).$$

Pour la construction de l'opérateur HUM, ce résultat de régularité n'est pas suffisant puisqu'il ne garantit pas que  $\operatorname{curl} \boldsymbol{\psi}$  admet une trace. Nous introduisons alors l'espace 'HUM' par

$$Y^{\text{HUM}} = \{ \{\boldsymbol{\psi}_0, \boldsymbol{\psi}_1\} \in Y \mid (\operatorname{curl} \boldsymbol{\psi})|_{\Gamma_0 \times (0, T)} \in L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Gamma_0)) \}. \quad (5.4)$$

La caractérisation de cet espace est délicate. En effet, nous avons démontré que  $Y = Y^{\text{HUM}}$  dans le cas où  $\Omega$  est un cube. Dans le cas général, la question reste ouverte.

Pour des données dans  $Y^{\text{HUM}}$ , on déduit de [91] l'estimation d'observabilité. Nous supposons à partir de maintenant que  $T$  et  $\Gamma_0$  contrôlent géométriquement  $\Omega$ . Alors,

$$\| \operatorname{curl} \boldsymbol{\psi}_0 \|_{0, \Omega}^2 + \| \boldsymbol{\psi}_1 \|_{0, \Omega}^2 \lesssim \| \operatorname{curl} \boldsymbol{\psi} \|_{L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Gamma_0))}^2 \quad \forall \{\boldsymbol{\psi}_0, \boldsymbol{\psi}_1\} \in Y^{\text{HUM}}, \quad (5.5)$$

ce qui permet de définir une norme sur  $Y^{\text{HUM}}$  par

$$\| \{\boldsymbol{\psi}_0, \boldsymbol{\psi}_1\} \|_{Y^{\text{HUM}}} \stackrel{\text{def}}{=} \| \operatorname{curl} \boldsymbol{\psi} \|_{L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Gamma_0))}.$$

En effet,  $\| \{\boldsymbol{\psi}_0, \boldsymbol{\psi}_1\} \|_{Y^{\text{HUM}}} = 0$  implique  $\operatorname{curl} \boldsymbol{\psi} = 0$  sur  $\Gamma_0 \times (0, T)$  par définition de la norme. On déduit par l'inégalité inverse (5.5) que les données initiales  $\{\boldsymbol{\psi}_0, \boldsymbol{\psi}_1\}$  du problème adjoint sont nulles ce qui entraîne  $\boldsymbol{\psi} \equiv \mathbf{0}$  par l'unicité de la solution de (5.2).

**Le problème rétrograde (reconstruction) :** Supposons que  $\mathcal{G} \in L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$ . Dans quel sens, le problème rétrograde (5.3) admet-il une solution ? La régularité  $L^2$  en temps et en espace ne permet pas de garantir l'existence d'un relèvement de la condition non-homogène

au bord nécessaire pour écrire une formulation variationnelle. Nous définissons alors la solution de (5.3) au sens très faible par la méthode de transposition (cf. [74] pour l'équation des ondes).

En effet, on montre par intégration par parties que toute solution  $\phi$  régulière de (5.3) vérifie

$$(\partial_t \phi(t), \psi(t)) - (\phi(t), \partial_t \psi(t)) = (\partial_t \phi(0), \psi_0) - (\phi(0), \psi_1) + \iint_{\Gamma_0 \times (0, T)} \mathcal{G} \cdot \text{curl } \psi \, ds \, dt \quad (5.6)$$

quel que soit  $\psi$ , solution du problème adjoint (5.2) pour des données initiales  $\{\psi_0, \psi_1\}$  régulières. Sans rentrer dans les détails, la méthode de transposition permet de prolonger la notion de solution au sens de (5.6) pour des champs  $\{\psi_0, \psi_1\}$  et  $\phi$  moins réguliers. Les produits scalaires  $L^2$  de l'identité (5.2) sont alors remplacés par des produits de dualité.

**L'opérateur HUM :** L'opérateur  $\Lambda$  de la méthode HUM est la composition d'un opérateur d'observation défini à partir du problème adjoint, et d'un opérateur de reconstruction défini à partir du problème auxiliaire rétrograde :

- (1) Etant donné un couple de champs  $\{\psi_0, \psi_1\} \in Y^{\text{HUM}}$ , calculer  $\psi$ , solution du problème adjoint pour les données initiales  $\{\psi_0, \psi_1\}$ .
- (2) Calculer  $\mathcal{G} = -\text{curl } \psi|_{\Gamma_0}$ . La définition de l'espace  $Y^{\text{HUM}}$  garantit que  $(\text{curl } \psi)|_{\Gamma_0} \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_0))$ .
- (3) Calculer  $\phi$ , solution du problème rétrograde au sens de la méthode de transposition, avec la donnée au bord  $\mathcal{G}$ .
- (4) Poser enfin

$$\Lambda(\{\psi_0, \psi_1\}) = \{\phi_1, -\phi_0\}, \quad (5.7)$$

avec  $\phi_0 \stackrel{\text{def}}{=} \phi(0)$  et  $\phi_1 \stackrel{\text{def}}{=} \partial_t \phi(0)$ .

Il découle de la méthode de transposition que le couple  $\{\phi_1, -\phi_0\}$  appartient à  $(Y^{\text{HUM}})'$ , le dual de  $Y^{\text{HUM}}$ . Par conséquent, l'opérateur  $\Lambda$  est définie sur  $Y^{\text{HUM}}$  à valeurs dans  $(Y^{\text{HUM}})'$  et (5.7) se lit au sens du produit dualité  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(Y^{\text{HUM}})', Y^{\text{HUM}}}$ . En particulier, nous avons

$$\langle \Lambda(\{\psi_0, \psi_1\}), \{\psi_0, \psi_1\} \rangle_{(Y^{\text{HUM}})', Y^{\text{HUM}}} = \|(\text{curl } \psi)|_{\Gamma_0}\|_{L^2(0, T; L^2(\Gamma_0))}^2. \quad (5.8)$$

Le théorème suivant montre que l'opérateur  $\Lambda$  est un homéomorphisme entre  $Y^{\text{HUM}}$  et son dual :

**Théorème 5.1. [Propriétés de l'opérateur HUM]**

Supposons que  $T$  et  $\Gamma_0$  contrôlent géométriquement le domaine  $\Omega$ . Alors, l'opérateur  $\Lambda$  défini par (5.7) est linéaire et auto-adjoint. Il définit un homéomorphisme de  $Y^{\text{HUM}}$  sur  $(Y^{\text{HUM}})'$ . □

*Démonstration.* L'estimation d'observabilité (5.5) est essentielle dans l'analyse de l'opérateur HUM car elle implique que  $\Lambda$  est injectif. En effet, supposons que  $\Lambda(\{\psi_0, \psi_1\}) = 0$  dans  $(Y^{\text{HUM}})'$ . Il découle de (5.8) que  $\text{curl } \psi = 0$  sur  $\Gamma_0 \times (0, T)$ . L'inégalité inverse garantit alors que  $\{\psi_0, \psi_1\} = 0$  ce qui montre que le noyau de  $\Lambda$  est réduit à zéro. La continuité et la surjectivité de  $\Lambda$  s'obtiennent à l'aide du théorème du graphe fermé et de l'application ouverte. □

Le théorème de contrôlabilité est maintenant une conséquence immédiate du fait que  $\Lambda$  soit un isomorphisme.

**Théorème 5.2. [Contrôlabilité exacte frontière]**

Supposons que  $T$  et  $\Gamma_0$  contrôlent géométriquement le domaine  $\Omega$ . Soit  $\{\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_1\}$  un couple de données initiales tel que  $\{\mathbf{E}_1, -\mathbf{E}_0\} \in (Y^{\text{HUM}})'$ . Soit  $\{\psi_0, \psi_1\}$  l'image réciproque de  $\{\mathbf{E}_1, -\mathbf{E}_0\}$  par l'opérateur  $\Lambda$ , et notons  $\boldsymbol{\psi}$  la solution de (5.2) pour les données initiales  $\{\psi_0, \psi_1\}$ . Alors  $\mathcal{G} = -(\text{curl } \boldsymbol{\psi})|_{\Gamma_0} \in L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Gamma_0))$  est le contrôle qui conduit le système (5.1) au repos au temps final  $T$ .  $\square$

*Démonstration.* Pour  $\{\mathbf{E}_1, -\mathbf{E}_0\} \in (Y^{\text{HUM}})'$  donné, il existe un unique couple  $\{\psi_0, \psi_1\} \in Y^{\text{HUM}}$  tel que

$$\Lambda(\{\psi_0, \psi_1\}) = \{\mathbf{E}_1, -\mathbf{E}_0\}. \quad (5.9)$$

Soit  $\boldsymbol{\psi}$  la solution de (5.2) pour les données initiales  $\{\psi_0, \psi_1\}$ . Par construction, le champ  $\mathcal{G} = -(\text{curl } \boldsymbol{\psi})|_{\Gamma_0}$  appartient à  $L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Gamma_0))$ . (5.9) implique que la solution  $\mathcal{E}$  du problème (5.1) coïncide avec celle du problème rétrograde. Par conséquent,

$$\mathcal{E}(0) = \partial_t \mathcal{E}(0) = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega. \quad \square$$

**5.2.2 Discrétisation et résultats numériques**

La méthode HUM décrite dans la section 5.2.1 est une méthode constructive. Pour des conditions initiales  $\{\mathbf{E}_1, -\mathbf{E}_0\}$  données, il suffit de résoudre numériquement l'équation (5.9) pour ensuite définir le contrôle  $\mathcal{G}$  à partir de la solution du problème adjoint (5.2). Nous supposons ici que les espaces  $Y$  et  $Y^{\text{HUM}}$  coïncident (ce qui est le cas pour le domaine modèle de nos simulations) et que  $\Omega$  est un polygone convexe de  $\mathbb{R}^2$ .

Notons que (5.9) est un problème linéaire qui admet la formulation variationnelle suivante

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u} = \{\psi_0, \psi_1\} \in Y \text{ tel que} \\ a_\Lambda(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{E}^*, \mathbf{v} \rangle_{Y', Y}, \quad \forall \mathbf{v} \in Y, \end{array} \right. \quad (5.10)$$

où l'on déduit le second membre  $\mathbf{E}^* = \{\mathbf{E}_1, -\mathbf{E}_0\} \in Y'$  des données initiales du problème de contrôlabilité ( $\mathcal{P}_{\text{control}}$ ). La forme bilinéaire  $a_\Lambda(\cdot, \cdot)$  est définie sur  $Y \times Y$  par

$$a_\Lambda(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \Lambda \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{Y', Y}.$$

$a_\Lambda(\cdot, \cdot)$  est symétrique, continue et coercive sur  $Y$  en raison des propriétés de l'opérateur  $\Lambda$ . Par conséquent, le problème variationnel (5.10) peut être résolu par un algorithme de gradient conjugué : après initialisation de l'algorithme par

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{u}^0 = \mathbf{0} \\ (\mathbf{g}^0, \mathbf{v})_Y = - \langle \mathbf{E}^*, \mathbf{v} \rangle_{Y', Y} \quad \forall \mathbf{v} \in Y \\ \mathbf{w}^0 = \mathbf{g}^0, \end{array} \right.$$

et jusqu'à l'arrêt,

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \text{ calculer } \mathbf{z}^k = \Lambda \mathbf{w}^k \\ (2) \text{ résoudre } (\mathbf{g}^{k+1}, \mathbf{v})_Y = \langle \mathbf{z}^k, \mathbf{v} \rangle_{Y', Y} \quad \forall \mathbf{v} \in Y \\ (3) \text{ calculer } \rho^k = \frac{\|\mathbf{r}^k\|_Y^2}{(\mathbf{g}^{k+1}, \mathbf{w}^k)_Y} \\ \text{MISES À JOUR :} \\ (4) \text{ inconnue : } \mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^k - \rho^k \mathbf{w}^{k+1} \\ (5) \text{ résidu : } \mathbf{r}^{k+1} = \mathbf{r}^k - \rho^k \mathbf{g}^{k+1} \\ (6) \text{ direction de recherche : } \mathbf{w}^{k+1} = \mathbf{r}^{k+1} + \gamma^{k+1} \mathbf{w}^k \text{ avec } \gamma^{k+1} = \frac{\|\mathbf{r}^{k+1}\|_Y^2}{\|\mathbf{r}^k\|_Y^2} \end{array} \right. \quad (5.11)$$

Ici, nous rappelons que le produit scalaire sur  $Y$  est donné par

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_Y = (\operatorname{curl} \mathbf{u}_0, \operatorname{curl} \mathbf{v}_0) + (\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1)$$

quels que soient  $\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1\}$  et  $\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1\}$  dans  $Y$ .

Les étapes principales d'une itération par l'algorithme (5.11) sont (1) l'évaluation de  $\Lambda \mathbf{w}^k$  qui nécessite la définition d'un opérateur HUM discret, ainsi que la résolution du problème (2) lequel se décompose en deux sous-problèmes en prenant successivement  $\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{0}\}$  et  $\mathbf{v} = \{\mathbf{0}, \mathbf{v}_1\}$  :

$$(\operatorname{curl} \mathbf{g}_0^{k+1}, \operatorname{curl} \mathbf{v}_0) = \ell_0(\mathbf{v}_0), \quad \forall \mathbf{v}_0 \in \mathcal{H}_0(\operatorname{curl}; \Omega) \cap \mathcal{H}(\operatorname{div}^0; \Omega), \quad (5.12a)$$

$$(\mathbf{g}_1^{k+1}, \mathbf{v}_1) = \ell_1(\mathbf{v}_1), \quad \forall \mathbf{v}_1 \in \mathcal{H}(\operatorname{div}^0; \Omega). \quad (5.12b)$$

La définition de l'opérateur HUM discret suit les étapes de la construction de  $\Lambda$ . Ainsi, chaque évaluation de l'opérateur nécessite la résolution numérique du problème adjoint et du problème rétrograde.

**Discrétisation en espace :** Pour la discrétisation en espace, nous avons choisi des éléments finis de Lagrange de type Q1 pour lesquels les degrés de liberté sont les valeurs des champs aux nœuds. L'utilisation de ces éléments finis non standards dans le contexte des équations de Maxwell nécessite quelques commentaires. Tout d'abord, on réécrit le problème sous forme d'un problème régularisé avec la forme bilinéaire

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \operatorname{curl} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx$$

qui est défini sur l'espace  $\mathcal{H}_0(\operatorname{curl}; \Omega) \cap \mathcal{H}(\operatorname{div}; \Omega)$  et coïncide avec la forme bilinéaire classique  $(\operatorname{curl} \cdot, \operatorname{curl} \cdot)$  sur  $\mathcal{H}_0(\operatorname{curl}; \Omega) \cap \mathcal{H}(\operatorname{div}^0; \Omega)$ . Notons que contrairement aux configurations décrites au chapitre 2, l'espace  $\mathcal{H}_0(\operatorname{curl}; \Omega) \cap \mathcal{H}(\operatorname{div}; \Omega)$  s'injecte dans  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  car le domaine  $\Omega$  est un polygone convexe [41]. Il est donc possible de discrétiser le problème régularisé par éléments finis de Lagrange sans rajouter des termes singuliers. Le choix de ces éléments finis a été motivé d'une part par un meilleur contrôle de la divergence des champs discrets (car la méthode converge dans  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  au lieu de  $\mathcal{H}(\operatorname{curl}; \Omega)$  pour les éléments finis d'arête). D'autre part, la résolution numérique du problème (5.10) à l'aide d'un algorithme de gradient conjugué doit être stabilisée par une méthode bi-grille dont la mise en œuvre est plus aisée pour les éléments finis de Lagrange, notamment pour ceux de type Q1.

Soit alors  $\mathcal{T}_h$  un maillage de  $\Omega$  constitué de rectangles et notons  $\mathcal{N}$  l'ensemble de ses nœuds. A chaque nœud  $M_I$  sont associés deux degrés de liberté  $\Psi_I = (\Psi_I^1, \Psi_I^2)^t \in \mathbb{R}^2$  correspondant aux valeurs en  $M_I$  des deux composantes du champ discret  $\psi_h$ . Si  $N_h$  désigne le nombre de nœuds du maillage, la dimension de l'espace de discrétisation  $X_h^{\text{Q1}}$  est  $2N_h$ . Notons  $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_{2N_h}(\mathbb{R})$  la matrice de masse et  $\mathbb{K} \in \mathcal{M}_{2N_h}(\mathbb{R})$  la matrice de 'rigidité' relative à la forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$ .

En notant, respectivement,  $\dot{\Psi}(t)$  et  $\ddot{\Psi}(t)$  la dérivée première et deuxième par rapport au temps  $t$ , la formulation semi-discret du problème adjoint s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \Psi(t) \in \mathbb{R}^{2N_h}, \quad \Psi_I(t) \times \mathbf{n}_I = 0 \quad \forall M_I \in \Gamma, \\ \mathbb{M} \ddot{\Psi}(t) + \mathbb{K} \dot{\Psi}(t) = 0 \text{ et} \\ \Psi(0) = \Psi^0, \quad \dot{\Psi}(0) = \dot{\Psi}^1, \end{array} \right. \quad (5.13)$$

pour des conditions initiales discrètes  $\{\psi_{0,h}, \psi_{1,h}\}$  de coefficients  $\Psi^0$  et  $\Psi^1$  respectivement. De même, le problème rétrograde semi-discret s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \Phi(t) \in \mathbb{R}^{2N_h}, \quad \Phi_I(t) \times \mathbf{n}_I = \begin{cases} G_I(t) & \text{si } M_I \in \Gamma_0, \\ 0 & \text{si } M_I \in \Gamma \setminus \Gamma_0, \end{cases} \\ \mathbb{M} \ddot{\Phi}(t) + \mathbb{K} \dot{\Phi}(t) = 0 \text{ et} \\ \Phi(T) = 0, \quad \dot{\Phi}(T) = 0, \end{array} \right. \quad (5.14)$$

où  $(G_I(t))_{M_I \in \Gamma_0}$  sont les valeurs au nœuds de la condition aux limites discrète  $\mathcal{G}_h$  définie sur  $\Gamma_0 \times (0, T)$ .

**Conditions aux limites :** Les conditions aux limites du problème adjoint et rétrograde portent sur la composante tangentielle des champs. Afin de prendre en compte ces conditions dans la discrétisation, on effectue un changement du repère local pour chaque nœud du bord. Dans le nouveau repère, les composantes normale et tangentielle sont découplées ce qui permet d'appliquer les techniques d'élimination classiques. Dans la suite, nous désignerons par  $V_h^{\text{Q1}}$  le sous-espace de  $X_h^{\text{Q1}}$  des champs à trace tangentielle nulle.

**Discrétisation en temps :** Pour la discrétisation en temps, nous avons choisi un schéma de Newmark implicite d'ordre deux qui est inconditionnellement stable. Il permet de calculer les solutions discrètes des problèmes adjoints et rétrograde aux instants  $t_n = n\Delta t$  avec un pas de temps constant  $\Delta t = \frac{T}{N}$ .

**L'opérateur HUM discret :** L'opérateur HUM discret,  $\Lambda_h$ , est maintenant défini par les étapes suivantes.

- (1) Soient  $\{\Psi^0, \Psi^1\}$  les coefficients des données initiales  $\{\psi_{0,h}, \psi_{1,h}\} \in V_h^{\text{Q1}}$ . Pour  $n = 1, \dots, N$ , calculer la solution  $(\Psi_I^n)_I$  du problème adjoint discret (5.13) par le schéma de Newmark. On notera  $\psi_h(\cdot, t_n) \in V_h^{\text{Q1}}$  le champ de vecteurs discret de coefficients  $(\Psi_I^n)_I$ .
- (2) Pour  $M_I \in \Gamma_0$  et  $n = 0, \dots, N$ , calculer

$$G_I^n = -\frac{1}{\text{card}\{\ell \mid M_I \in K_\ell\}} \sum_{\ell: M_I \in K_\ell} (\text{curl } \psi_{h|K_\ell}) (M_I, t_n). \quad (5.15)$$

- (3) Pour  $n = N - 1, \dots, 0$ , calculer la solution  $(\Phi_I^n)_I$  du problème rétrograde (5.14) avec donnée  $(G_I^n)_I$  au bord par le schéma de Newmark.
- (4) Poser

$$\Lambda_h(\{\Psi^0, \Psi^1\}) = \left\{ \left( \frac{\Phi_I^1 - \Phi_I^0}{\Delta t} \right)_I, (-\Phi_I^0)_I \right\}. \quad (5.16)$$

**Calcul du résidu :** L'étape (2) de l'algorithme du gradient conjugué (5.11) consiste à résoudre un problème de type magnétostatique. La discrétisation du problème (5.12a) se fait également par éléments finis de Lagrange Q1 en rajoutant à la forme bilinéaire de (5.12a) le terme régularisant  $(\text{div } \cdot, \text{div } \cdot)$ . La solution de (5.12b) est obtenue ensuite par simple identification.

**Stabilisation par approche bi-grille :** Lorsque le pas du maillage tend vers zéro, on observe dans certains cas l'apparition d'oscillations parasites (cf. [57]). Celles-ci peuvent être évitées si l'on utilise une stabilisation de type bi-grille. Ici, nous calculons le résidu défini par (5.12) sur un maillage 'grossier' de pas  $2h$  tandis que l'évaluation de l'opérateur  $\Lambda_h$  se fait sur le maillage 'fin' de pas  $h$ . Les opérateurs d'interpolation et de restriction sont construits aisément du fait que les maillages de rectangles sont imbriqués.

La résolution numérique du problème de contrôle ( $\mathcal{P}_{\text{control}}$ ) de conditions initiales  $\{\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_1\}$  consiste maintenant à

1. résoudre (5.9) par l'algorithme du gradient conjugué (5.11) en remplaçant  $\Lambda$  par  $\Lambda_h$ . Après  $K$  itérations, on obtient ainsi une solution approchée  $\mathbf{u}^K = \{\psi_0^K, \psi_1^K\}$ ,
2. résoudre le problème (5.13) avec les données initiales  $\{\psi_0^K, \psi_1^K\}$  par le schéma de Newmark. On obtient alors une solution  $\psi_h$  telle que  $\psi_h(\cdot, t_n) \in V_h^{\text{Q1}}$  quel que soit  $n = 0, \dots, N$ .
3. définir, pour  $n = 0, \dots, N$ , le contrôle discret  $\mathcal{G}_h(\cdot, t_n)$  de coefficients  $(G_I^n)_I$  par la formule (5.15).

Nous avons validé notre algorithme pour la résolution numérique du problème ( $\mathcal{P}_{\text{control}}$ ) sur le carré  $\Omega = ]-1, 1[^2$  avec plusieurs type de données (polynômiales et oscillantes) pour des configurations de contrôle totale ou partiel (sur 2 ou 3 côtés du carré). Ici, nous montrons l'évolution en temps des deux composantes du champ électrique avec contrôle sur le bord entier ( $\Gamma_0 = \Gamma$ ). La figure 5.1 montre clairement que le contrôle calculé numériquement conduit le système au repos au temps final  $T$ .

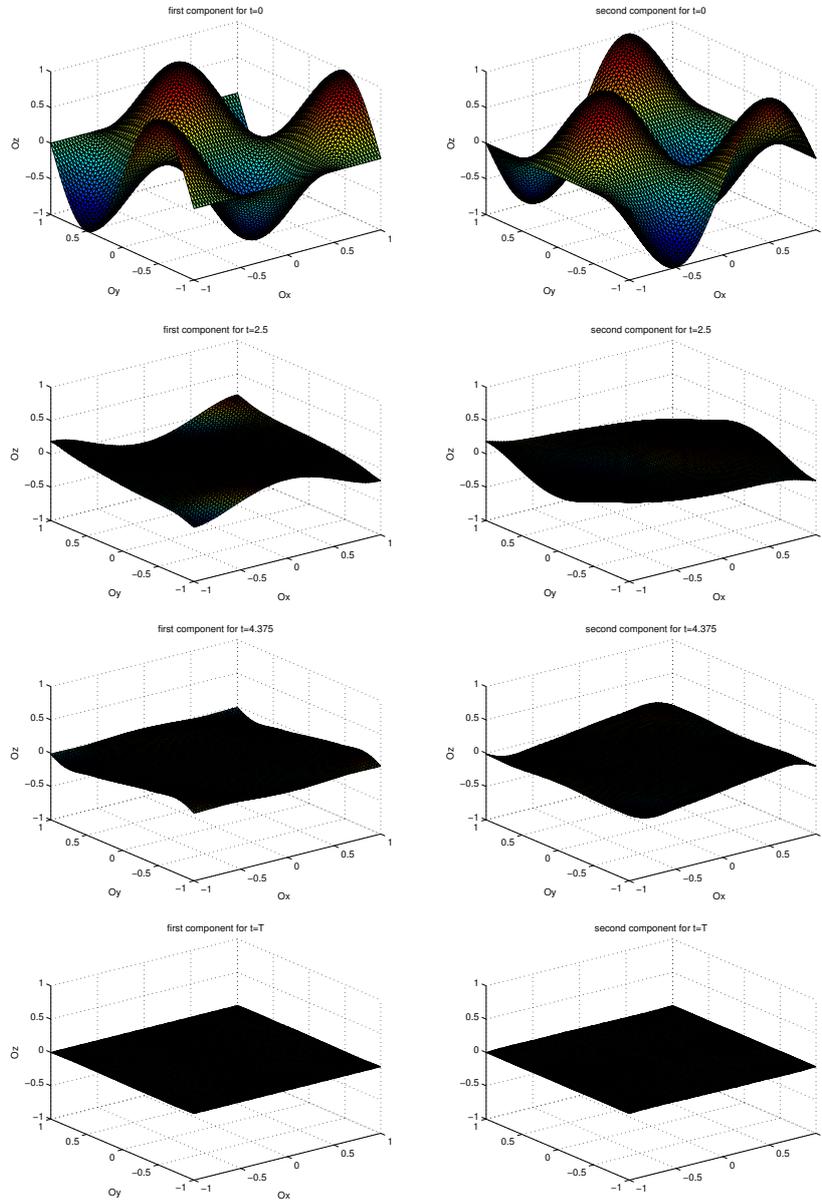


FIGURE 5.1 – Evolution du champ électrique au cours du temps avec contrôle sur tout le bord. Composante selon  $\vec{0x}$  (colonne gauche). Composante selon  $\vec{0y}$  (colonne droite).

### 5.3 Reconstruction de petites imperfections

Nous utilisons maintenant les résultats de la section précédente pour localiser des défauts d'homogénéité dans la perméabilité d'un matériau diélectrique. Une étude similaire a été menée dans [11] dans le cadre de l'équation des ondes scalaire pour détecter de petites perturbations de la conductivité d'un matériau. Nous présentons notre approche dans une configuration 2D.

### 5.3.1 Position du problème de reconstruction

Soit alors un objet, nommé ci-dessous *pièce à contrôler*, d'un matériau de permittivité électrique  $\varepsilon = \text{const.}$  et de perméabilité magnétique  $\mu_\alpha$ . Nous supposons que l'objet peut être représenté par un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  régulier ou de la forme d'un polygone convexe, et que la perméabilité  $\mu_\alpha$  est de la forme

$$\mu_\alpha(\mathbf{x}) = 1 + \alpha p(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (5.17)$$

La fonction  $p = p(\mathbf{x})$  quantifie la perturbation de la perméabilité par rapport à la perméabilité du fond ( $\varepsilon = \text{const.}$ ,  $\mu = \text{const.}$ ), et  $\alpha > 0$  représente l'ordre de grandeur de cette perturbation. Sans restriction de la généralité, nous prenons dans la suite  $\varepsilon = 1$  et  $\mu = 1$  pour les paramètres du milieu de fond. Nous supposons également que la fonction  $p$  vérifie les hypothèses suivantes

$$p \in C^1(\overline{\Omega}), \quad \text{supp}(p) \subset \Omega', \quad \text{et } |p(\mathbf{x})| \leq M, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega'. \quad (5.18)$$

où  $\Omega' \subset \Omega$  est un domaine régulier tel que  $\text{dist}(\Gamma, \partial\Omega') > \delta > 0$ ,  $\Gamma$  étant la frontière du domaine  $\Omega$ .

En l'absence de charges et de sources de courant volumiques, la propagation de l'onde électromagnétique à travers le matériau perturbé est décrite par le champ électrique  $\mathcal{E}_\alpha$ , solution du problème

$$\partial_t^2 \mathcal{E}_\alpha + \text{curl}(\mu_\alpha^{-1} \text{curl} \mathcal{E}_\alpha) = \mathbf{0}, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (5.19a)$$

$$\text{div} \mathcal{E}_\alpha = 0, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (5.19b)$$

$$\mathcal{E}_\alpha \times \mathbf{n} = \mathcal{F}, \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T), \quad (5.19c)$$

$$\mathcal{E}_\alpha(\cdot, 0) = \mathbf{E}_0, \quad \partial_t \mathcal{E}_\alpha(\cdot, 0) = \mathbf{E}_1, \quad \text{dans } \Omega. \quad (5.19d)$$

Ici,  $\mathcal{F}$  représente une source surfacique sur  $\Gamma$ , et  $\{\mathbf{E}^0, \mathbf{E}^1\}$  sont les conditions initiales du problème. Considérons ensuite une pièce de référence sans défaut ayant les mêmes dimensions que la pièce à contrôler. Dans la pièce de référence pour laquelle la perméabilité vaut  $\mu = 1$ , la propagation du champ électromagnétique soumis aux mêmes sources et conditions initiales  $\{\mathcal{F}, \mathbf{E}^0, \mathbf{E}^1\}$ , est décrite par  $\mathcal{E}$ , solution du problème

$$\partial_t^2 \mathcal{E} + \text{curl} \text{curl} \mathcal{E} = \mathbf{0}, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (5.20a)$$

$$\text{div} \mathcal{E} = 0, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (5.20b)$$

$$\mathcal{E} \times \mathbf{n} = \mathcal{F}, \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T), \quad (5.20c)$$

$$\mathcal{E}(\cdot, 0) = \mathbf{E}_0, \quad \partial_t \mathcal{E}(\cdot, 0) = \mathbf{E}_1, \quad \text{dans } \Omega. \quad (5.20d)$$

Notons que pour  $\mathcal{F}$  suffisamment régulier et  $\{\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_1\} \in (\mathcal{H}_0(\text{curl}; \Omega) \cap \mathcal{H}(\text{div}^0; \Omega)) \times \mathcal{H}(\text{div}^0; \Omega)$ , les problèmes (5.19) et (5.20) rentrent dans le cadre de la théorie variationnelle de Lions-Magenes [75] et sont donc bien posés.

Supposons maintenant que nous ayons à notre disposition des mesures dynamiques  $\text{curl} \mathcal{E}_\alpha(\cdot, t)$  et  $\text{curl} \mathcal{E}(\cdot, t)$  récoltées sur une partie  $\Gamma_0 \subset \Gamma$  de la pièce à contrôler et de la pièce de référence au cours de l'intervalle en temps  $(0, T)$ . Supposons également que nous connaissions l'ordre de grandeur  $\alpha$  de la perturbation. Nous nous proposons de résoudre numériquement le problème inverse suivant :

$$(\mathcal{P}_{\text{inverse}}) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Etant donnés une source surfacique } \mathcal{F} \text{ et des conditions initiales } \{\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_1\}, \\ \text{déterminer la fonction } p \text{ de (5.17)} \\ \text{à partir de } \alpha \text{ ainsi que des mesures } \text{curl} \mathcal{E}_\alpha \text{ et } \text{curl} \mathcal{E} \text{ sur } \Gamma_0 \times (0, T). \end{array} \right.$$

### 5.3.2 La formule asymptotique d'Ammari

La théorie du problème ( $\mathcal{P}_{\text{inverse}}$ ) a été abordée par Ammari dans [4] dont nous résumons ici brièvement les résultats principaux.

Pour un vecteur d'onde  $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2)^t \in \mathbb{R}^2$ , considérons les termes source

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}, t) = (\boldsymbol{\eta}^\perp \times \mathbf{n}) e^{i\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{x} - i|\boldsymbol{\eta}|t}, \quad \mathbf{E}_0(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\eta}^\perp e^{i\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{x}} \quad \text{et} \quad \mathbf{E}_1(\mathbf{x}) = -i|\boldsymbol{\eta}| \mathbf{E}_0(\mathbf{x}). \quad (5.21)$$

On reconnaît dans (5.21) la trace tangentielle ainsi que les valeurs en  $t = 0$  de l'onde plane

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\eta}^\perp e^{i\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{x} - i|\boldsymbol{\eta}|t} \quad (5.22)$$

se propageant dans le milieu sans défaut. Ainsi, le champ  $\mathcal{E}$  défini par (5.22) est l'unique solution de (5.20) pour les données (5.21).

Considérons maintenant le système (5.20) pour la donnée initiale  $\mathbf{E}_0$  tronquée et un terme de contrôle  $\mathcal{G}_\boldsymbol{\eta}$  sur  $\Gamma_0 \times (0, T)$  :

$$\partial_t^2 \mathcal{U}_\boldsymbol{\eta} + \text{curl curl } \mathcal{U}_\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (5.23a)$$

$$\text{div } \mathcal{U}_\boldsymbol{\eta} = 0, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (5.23b)$$

$$\mathcal{U}_\boldsymbol{\eta} \times \mathbf{n} = \mathcal{G}_\boldsymbol{\eta}, \quad \text{sur } \Gamma_0 \times (0, T), \quad (5.23c)$$

$$\mathcal{U}_\boldsymbol{\eta} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad \text{sur } (\Gamma \setminus \Gamma_0) \times (0, T), \quad (5.23d)$$

$$\mathcal{U}_\boldsymbol{\eta}(\cdot, 0) = \beta \mathbf{E}_0 + \nabla \psi, \quad \partial_t \mathcal{U}_\boldsymbol{\eta}(\cdot, 0) = \mathbf{0}, \quad \text{dans } \Omega. \quad (5.23e)$$

Ici,  $\beta \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$  est une fonction de troncature qui vaut 1 sur le sous-domaine  $\Omega'$  contenant les perturbations. Le potentiel scalaire  $\psi$  corrige cette donnée tronquée pour que  $\beta \mathbf{E}_0 + \nabla \psi$  reste à divergence nulle dans  $\Omega$ . Le champ  $\mathbf{E}_0$  est défini comme dans (5.21). D'après les résultats de la section 5.2 et à condition que  $\Gamma_0$  et  $T$  contrôlent géométriquement  $\Omega$ , il existe un contrôle  $\mathcal{G}_\boldsymbol{\eta}$  tel que la solution  $\mathcal{U}_\boldsymbol{\eta}$  du système (5.23) vérifie  $\mathcal{U}(T) = \partial_t \mathcal{U}(T) = \mathbf{0}$  dans  $\Omega$ .

Dans la formule asymptotique d'Ammari, le contrôle  $\mathcal{G}_\boldsymbol{\eta}$  joue le rôle d'un poids pour la différence entre les mesures  $\text{curl } \mathcal{E}_\alpha$  et  $\text{curl } \mathcal{E}$ . Le résultat suivant a été démontré dans [4].

#### Théorème 5.3. [La formule asymptotique]

*Supposons que  $\Gamma_0$  et  $T$  contrôlent géométriquement le domaine  $\Omega$ . Alors,*

$$\iint_{\Gamma_0 \times (0, T)} e^{i|\boldsymbol{\eta}|t} \partial_t \left( e^{-i|\boldsymbol{\eta}|t} \mathcal{G}_\boldsymbol{\eta} \right) (\text{curl } \mathcal{E}_\alpha - \text{curl } \mathcal{E}) \, d\sigma \, dt = -\alpha |\boldsymbol{\eta}|^2 \int_{\Omega'} p(\mathbf{x}) e^{2i\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{x}} \, d\mathbf{x} + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (5.24)$$

*Le terme en  $\mathcal{O}(\alpha^2)$  ne dépend que de la borne  $M$  de la perturbation  $p$ .  $\square$*

### 5.3.3 L'algorithme de reconstruction

La formule asymptotique (5.24) permet la reconstruction de la fonction  $p$  par transformée de Fourier (inverse). En effet, si

$$\hat{u}(\boldsymbol{\eta}) = \int_{\mathbb{R}^2} u(\mathbf{z}) e^{-2i\pi \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{z}} \, d\mathbf{z}$$

désigne la transformée de Fourier d'une fonction  $u$  définie dans le domaine physique, on obtient par changement de variables que

$$\int_{\Omega'} p(\mathbf{x}) e^{2i\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{x}} \, d\mathbf{x} = \pi^2 \widehat{p(-\boldsymbol{\eta})}.$$

Définissons la quantité  $M_\alpha(\boldsymbol{\eta})$  pour tout  $\boldsymbol{\eta} \neq \mathbf{0}$  par

$$M_\alpha(\boldsymbol{\eta}) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{\alpha |\boldsymbol{\eta}|^2} \iint_{\Gamma_0 \times (0, T)} e^{i|\boldsymbol{\eta}|t} \partial_t \left( e^{-i|\boldsymbol{\eta}|t} \mathcal{G}_\boldsymbol{\eta} \right) (\text{curl } \mathcal{E}_\alpha - \text{curl } \mathcal{E}) \, d\sigma \, dt. \quad (5.25)$$

Alors, d'après (5.24)

$$M_\alpha(\boldsymbol{\eta}) \stackrel{\mathcal{O}(\alpha)}{\approx} \pi^2 \widehat{p(-\pi \cdot)}$$

et par conséquent,

$$p(-\pi \mathbf{x}) \approx \frac{1}{\pi^2} \check{M}_\alpha(\mathbf{x}), \quad (5.26)$$

où la transformée de Fourier inverse d'une fonction  $U$  définie dans le domaine fréquentiel est donnée par

$$\check{U}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} U(\boldsymbol{\eta}) e^{2i\pi \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{x}} d\boldsymbol{\eta}.$$

Le calcul numérique de  $\check{M}_\alpha$  nécessite l'échantillonnage de  $M_\alpha$ , et donc des mesures  $\text{curl } \mathcal{E}_\alpha$  et  $\text{curl } \mathcal{E}$ , sur un ensemble de  $N_e \times N_e$  fréquences discrètes appartenant à un domaine  $[-\eta_{\max}, \eta_{\max}]^2$ . Pour chaque fréquence discrète  $\boldsymbol{\eta}$ , il faut par ailleurs calculer le terme de contrôle  $\mathcal{G}_\boldsymbol{\eta}$  correspondant.

D'après le théorème de Nyquist-Shannon, un signal  $f(t)$  de bande limitée  $\text{supp}(\hat{f}) \subset [-L, L]$  peut être reconstruit sans perte d'information à partir de ses échantillons  $(f(n\Delta t))_n$  si la fréquence d'échantillonnage  $F_e = 1/\Delta t$  vérifie  $F_e \geq 2L$ . Dans le contexte de la formule (5.26), le pas d'échantillonnage dans chaque direction est donné par  $\Delta \eta = \frac{2\eta_{\max}}{N_e}$ , tandis que le support de  $\check{M}_\alpha$  est contenu dans  $[-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}]$  puisque  $\text{supp}(p) \subset [-1, 1]^2$ . Il faut alors choisir  $\eta_{\max}$  et  $N_e$  de sorte que

$$\frac{\eta_{\max}}{N_e} \geq \frac{\pi}{4}$$

afin d'éviter un repliement du spectre.

L'algorithme de reconstruction peut maintenant être résumé par le schéma de la figure 5.2 : pour un ensemble de termes sources donnés sous forme d'ondes planes de vecteur d'onde  $\boldsymbol{\eta}$  (cf. (5.21)), on récolte des mesures sur la pièce à contrôler ( $\text{curl } \mathcal{E}_\alpha$ ) et une pièce de référence sans défaut ( $\text{curl } \mathcal{E}$ ). Parallèlement, on calcule les termes de contrôle  $\mathcal{G}_\boldsymbol{\eta}$  par la méthode HUM décrite dans la section 5.2. Ensuite, on forme le signal échantillonné  $M_\alpha(\boldsymbol{\eta})$  que l'on inverse par IFFT (transformée de Fourier rapide inverse) pour retrouver la fonction  $p$  qui décrit les défauts.

En l'absence de mesures expérimentales, nous avons généré des mesures  $\text{curl } \mathcal{E}_\alpha$  et  $\text{curl } \mathcal{E}$  synthétiques par la résolution des problèmes (5.19) et (5.20) pour une fonction  $p$  fixée. Les résultats numériques ci-dessous ont été obtenus pour des données non bruitées. Les tests que nous avons effectués sur des données synthétiques bruitées ont montré que l'algorithme reste stable jusqu'à un bruit gaussien de 3 à 5%.

Nous avons validé l'algorithme de reconstruction avec de nombreux exemples pour lesquels la fonction  $p$  était donnée sous forme d'une somme de fonctions caractéristiques :

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m a_j \chi_{D_j}(\mathbf{x}).$$

Le support  $D_j$  du  $j$ ème défaut est un rectangle de point milieu  $(x_j, y_j)$  dont les côtés sont de longueur  $\mathcal{O}(h)$  avec  $h = 1/32$ .

Pour la méthode HUM qui fournit les termes de contrôle  $\mathcal{G}_\boldsymbol{\eta}$ , nous avons utilisé deux maillages imbriqués de pas  $h_F = 1/32$  pour le maillage fin et  $h_G = 1/16$  pour le maillage grossier, ainsi qu'un temps final de  $T = 4$ .

La première figure (Fig. 5.3) montre la reconstruction de deux (resp. quatre) défauts avec  $N_e = 16$  échantillons dans chaque direction. Le support du défaut exact est représenté par un rectangle noir. L'algorithme permet de localiser les défauts avec une précision de l'ordre de  $10^{-2}$ .

La reconstruction de deux défauts proches l'un de l'autre nécessite un échantillonnage plus fin comme le montre la Figure 5.4. En effet, on voit (Fig. 5.4, gauche) que l'échantillonnage

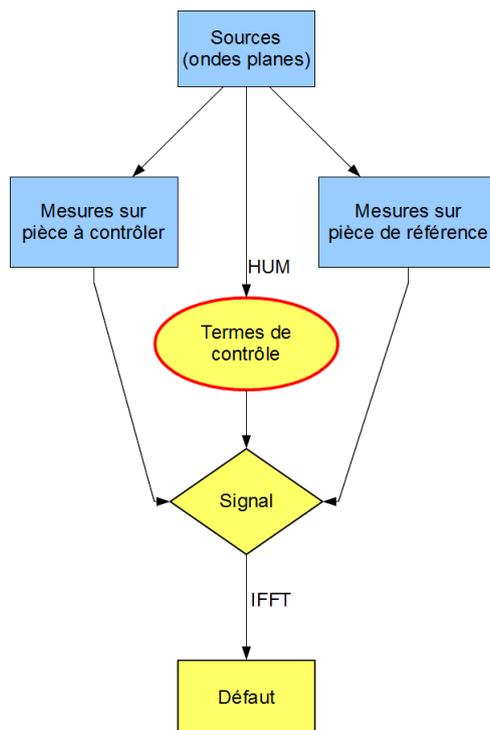


FIGURE 5.2 – Schéma de l'algorithme de reconstruction.

avec  $N_e = 16$  échantillons dans chaque direction ne permet pas de départager les deux défauts, tandis que la reconstruction avec  $N_e = 32$  échantillons coïncide bien avec le support exact. Un phénomène similaire peut être observé si l'un des défauts est situé près du bord de  $\Omega$ .

Nous avons finalement testé la reconstruction d'une forme géométrique plus complexe. La Figure 5.5 représente la reconstruction d'une perturbation sous forme de croix avec  $N_e^2 = 1024$  échantillons.

## 5.4 Conclusion et perspectives

Sur la base des résultats théoriques d'Amari [4], nous avons développé un algorithme de reconstruction qui permet de localiser de petits défauts d'homogénéité dans la perméabilité d'un

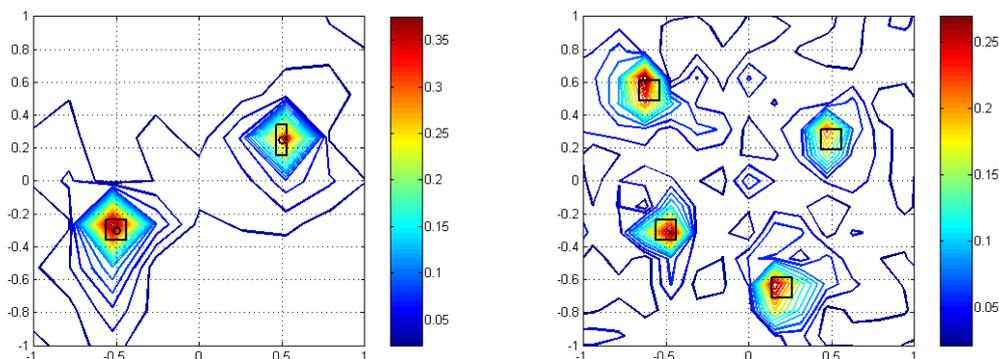


FIGURE 5.3 – Reconstruction de défauts multiples (rectangles noirs).

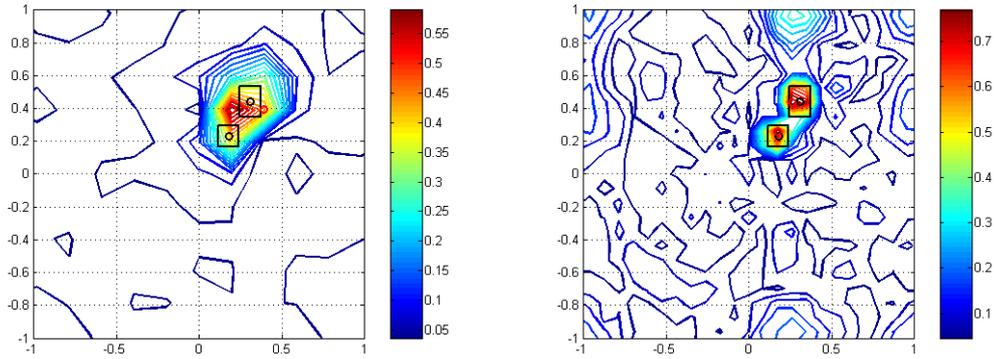


FIGURE 5.4 – Reconstruction de deux défauts proches (rectangles noirs) avec 256 (gauche) et 1024 (droite) échantillons.

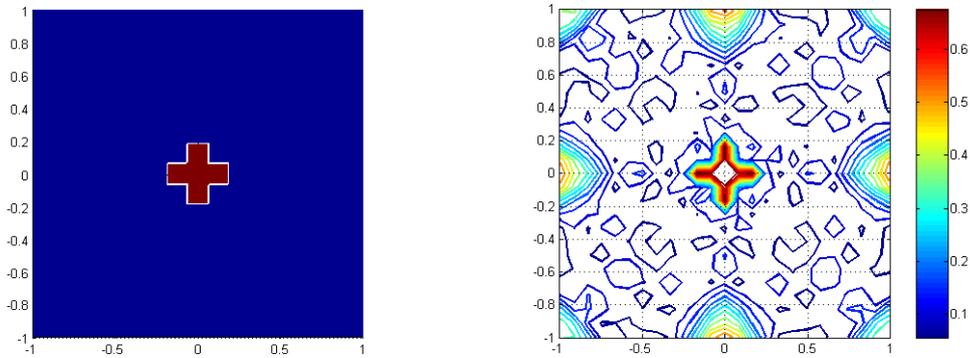


FIGURE 5.5 – Reconstruction d'un défaut sous forme de croix : forme exacte (gauche) et reconstruction (droite).

matériau diélectrique à partir de mesures dynamiques sur la pièce à contrôler ainsi que sur une pièce de référence saine. En particulier, la méthode permet la reconstruction des défauts à partir de mesures prises seulement sur une partie du bord du domaine. Ceci est intéressant d'un point de vue pratique car il est rare que toute la surface d'une pièce à contrôler soit accessible aux instruments de mesure.

Les résultats obtenus pour une configuration 2D sont prometteurs, et permettent d'envisager le développement d'un code 3D. Il sera alors nécessaire d'optimiser toutes les étapes de l'algorithme pour éviter des temps de calcul prohibitifs. La méthode de reconstruction repose en effet sur le calcul effectif de termes de contrôle  $\mathcal{G}_\eta$  pour chaque échantillon. Ces termes sont calculés avec la méthode HUM qui, à elle toute seule, a déjà une complexité algorithmique élevée. En revanche, le calcul peut être effectué de façon massivement parallèle en amont de la procédure de reconstruction. Les termes  $\mathcal{G}_\eta$  jouent alors le rôle d'une base de données calculée une fois pour toutes.



## Chapitre 6

# Perspectives et travaux en cours

### Simulations numériques 3D

Si la majorité des résultats théoriques décrits dans ce document ont été obtenus à la fois pour des géométries en deux et trois dimensions, les simulations se limitent pour le moment au 2D. Afin de passer à des configurations plus réalistes, il sera indispensable de porter les codes en 3D ce qui nécessitera un investissement important.

En ce qui concerne les méthodes de type XFEM, nous envisageons de les tester dans un premier temps pour une configuration cylindrique de type  $\Omega \times [0, 1]$  avec  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  qui est en quelque sorte "à mi chemin entre le 2D et le 3D". L'analyse asymptotique du champ électrique au voisinage de l'embouchure de la fissure est alors à reprendre puisque certains outils utilisés sont limités au 2D. Pour le passage à des configurations réalistes 3D telles qu'on les trouve en contrôle non destructif, nous envisageons une collaboration avec Yann Le Bihan, chercheur en électronique au Laboratoire du génie électrique de Paris (LGEP, Gif-sur-Yvette).

Pour la reconstruction de petits défauts d'homogénéité dans les matériaux diélectriques, le passage au 3D est également envisageable. Ici, il s'agira de faire appel à un solveur robuste des équations de Maxwell 3D. Une des questions soulevées sera alors le choix de la méthode de discrétisation. Actuellement, nous travaillons avec un solveur éléments finis de Lagrange sur une formulation régularisée des équations de Maxwell ce qui est possible puisque le domaine de propagation est un polygone convexe. L'utilisation de la méthode des éléments finis d'arête, quant à elle, nécessite une prise en compte adéquate des conditions de jauge. Une autre difficulté peut se poser au niveau de la méthode HUM employée dans le calcul des termes de contrôle : actuellement, nous utilisons une méthode bi-grille afin de stabiliser la méthode et d'éviter l'apparition d'oscillations parasites. Il faudra alors étudier et implémenter de telles méthodes dans le cadre des éléments finis d'arêtes.

### Reconstruction de fissures et de petits défauts

Les travaux sur la reconstruction de petits défauts ont constitué un premier pas vers la thématique des problèmes inverses. Dans le cadre du projet PINCEL (Projet IndustriLab, Région Picardie), nous envisageons avec Marion Darbas (LAMFA, UPJV) d'implémenter des méthodes de reconstruction de fissures planes à partir de mesures des champs électrique et magnétique sur le bord du conducteur en utilisant une approche proposée par Ammari et Bao [5].

Parallèlement, j'ai travaillé sur la localisation de fissures par courants de Foucault à l'aide d'un algorithme génétique basé sur la méthode des éléments finis étendus. Les résultats que nous avons obtenus dans une configuration académique ne prenant en compte que le conducteur sont prometteurs, et avec Jean-Charles Boisson (CRESTIC, URCA) et François Lefèvre (LMR, URCA) nous cherchons actuellement à mettre en place la méthode pour un dispositif de CND réa-

liste. L'utilisation d'un algorithme génétique nécessite des ressources informatiques importantes, et nous comptons mettre à profit pour nos calculs le tout nouveau super-calculateur ROMEO du centre de calcul Champagne Ardenne.

## Localisation de sources épileptiques chez le nouveau-né

Un tout autre champ d'application sur lequel j'ai commencé à travailler récemment se situe dans le domaine biomédical. Il s'agit d'analyser l'impact de la fontanelle dans la localisation de sources épileptiques chez le nouveau-né. Ces travaux sont soutenus par la région Picardie à travers le projet MIFAC (Modélisation de l'Impact de la Fontanelle dans la localisation des Activités Cérébrales normales et pathologiques chez le nouveau-né) et participent au programme de recherche défini par F. Wallois, neurophysiologiste au GRAMFC (CHU d'Amiens).

L'Electro-Encéphalo-Graphie (EEG) est un outil largement utilisé dans la localisation de sources physiologiques ou pathologiques chez l'adulte et le grand enfant. Chez le nouveau-né, et plus particulièrement chez le prématuré, le recours à l'EEG pose actuellement des problèmes à la fois techniques (conception d'un casque adapté, limites de l'expérimentation *in vivo* du fait de la souffrance du nouveau-né) et conceptuels (manque de données sur la conductivité et l'épaisseur du crâne, prise en compte de la fontanelle aux propriétés drastiquement différentes de la matière osseuse).

Les travaux de la thèse de Malal DIALLO (LAMFA, UPJV) que je co-encadre depuis octobre 2013 avec M. Darbas (LAMFA, UPJV) et A. El Badia (LMAC, UTC), devront apporter des réponses à la question de l'impact de la présence de la fontanelle chez le prématuré sur les mesures en EEG, et sur la localisation des sources épileptiques. Nous travaillons actuellement sur la prise en compte de la fontanelle dans les modèles existants ainsi que sur la résolution du problème direct par une méthode d'éléments finis 3D. En effet, contrairement aux modèles pour l'adulte lesquels sont résolus en général *via* une méthode d'équations intégrales, la présence de la fontanelle chez le nouveau-né impose la résolution du problème par une méthode d'éléments finis volumiques. L'obtention d'un maillage de tête de nouveau-né réaliste est alors primordial. Un premier objectif sera d'observer numériquement l'impact de la présence de la fontanelle sur les mesures surfaciques du potentiel électrique. Dans la suite, nous nous intéresserons à la résolution du problème inverse associé qui devra permettre de localiser et caractériser les sources épileptiques à partir des mesures prises à la surface de la tête pour une classe de conductivités admissibles de la fontanelle. Les travaux seront menés en étroite collaboration avec l'équipe GRAMFC du CHU d'Amiens.

## Annexe A

# Contributions diverses

### Conditions aux limites absorbantes pour l'équation de Helmholtz

[JLV99] P. JOLY, S. LOHRENGEL ET O. VACUS, Un résultat d'existence et d'unicité pour l'équation de Helmholtz avec conditions aux limites absorbantes d'ordre 2, *C.R. Acad. Sci. Paris, Série I* **329** (1999), pp. 193–198.

Dans cette note, nous étudions des conditions aux limites absorbantes d'ordre 2 pour l'équation de Helmholtz dans un rectangle du plan. Des conditions spécifiques localisées aux quatre sommets du domaine sont établies afin de garantir une certaine régularité de la solution. Le problème, complété par ces conditions, s'avère alors bien posé dans l'espace énergie habituel.

### Transport quantique dans des dispositifs semi-conducteur

[GL02] T. GOUDON ET S. LOHRENGEL, On a discrete model for quantum transport in semiconductor devices, *Transport Theory Statist. Phys.* **31** (2002), pp. 471–490.

Ce papier est issu d'une collaboration avec T. Goudon pendant que j'étais Maître de conférences à l'Université de Nice. Dans [58], T. Goudon propose un modèle semi-discret de l'équation de Wigner dans le cadre de la modélisation de dispositifs semi-conducteurs. La fonction de Wigner apparaît alors comme la transformée de Fourier inverse de la matrice de densité, et une étude d'une version semi-discrète (en la variable de la vitesse) de l'équation de Wigner est menée. Ma contribution a consisté à mettre en œuvre en une dimension d'espace une méthode numérique basée sur la technique de l'"operator splitting" permettant le calcul d'une solution approchée en deux étapes : résoudre l'équation de transport avec une vitesse constante, puis prendre en compte l'opérateur de collision. Les résultats numériques obtenus ont permis d'illustrer certaines propriétés du modèle.



## Annexe B

# Bibliographie personnelle

### La méthode du champ singulier (Travaux de thèse)

- [BHL99] A.-S. BONNET-BEN DHIA, C. HAZARD ET S. LOHRENGEL, A singular field method for the solution of Maxwell's equations in polyhedral domains, *SIAM J. Appl. Math.* **56**, 6 (1999), pp. 2028–2044.  
<http://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/S0036139997323383>
- [CHL98] P. CIARLET JR., C. HAZARD ET S. LOHRENGEL, Les équations de Maxwell dans un polyèdre : un résultat de densité, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I* **326** (1998), pp. 1305–1310.  
<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0764444298801845>

### Méthodes pour matériaux composites

- [LN00] S. LOHRENGEL ET S. NICAISE, Les équations de Maxwell dans des matériaux composites : problèmes de densité, *C. R. Acad. Sc. Paris, Série I* **330** (2000), pp. 991–996.  
<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0764444200003049>
- [HL02] C. HAZARD ET S. LOHRENGEL, A singular field method for Maxwell's equations : numerical aspects for 2D magnetostatics, *SIAM J. Numer. Anal.* **40**, 3 (2002), pp. 1021–1040.  
<http://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/S0036142900375761>
- [LN02] S. LOHRENGEL ET S. NICAISE, Singularities and density problems for composite materials in electromagnetism, *Commun. PDE* **27**, 7&8 (2002), pp. 1575–1623.  
<http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1081/PDE-120005849>
- [LN07] S. LOHRENGEL ET S. NICAISE, A discontinuous Galerkin method on refined meshes for the 2D time-harmonic Maxwell equations in composite materials, *J. Comput. Appl. Math.* **206** (2007), pp. 27–54.  
<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042706003487>
- [CLLN10] P. CIARLET JR., F. LEFÈVRE, S. LOHRENGEL ET S. NICAISE, Weighted regularization for composite materials in electromagnetism, *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* **44** (2010), no. 1, pp. 75–108.  
<http://www.esaim-m2an.org/action/displayAbstract?fromPage=online&aid=8134290>

## Schémas numériques avec flux centrés

- [LR02] S. LOHRENGEL ET M. REMAKI, A FV Scheme for Maxwell's equations – Convergence analysis on unstructured meshes, *Finite Volumes for Complex Applications III*, ed. R. Herbin & D. Kröner, Hermes, London, 2002, pp. 219–226. Prépublication Laboratoire J.A. Dieudonné, Nice.
- [FLLP05] L. FEZOU, S. LANTERI, S. LOHRENGEL ET S. PIPERNO, Convergence and stability of a discontinuous Galerkin time-domain method for the 3D heterogeneous Maxwell equations on unstructured meshes, *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* **39** (2005), pp. 1149–1176.  
<http://www.esaim-m2an.org/action/displayAbstract?fromPage=online&aid=8201131>

## Méthodes des éléments finis étendus

- [LLN11] F. LEFÈVRE, S. LOHRENGEL ET S. NICAISE, An extended finite element method for 2D edge elements, *Int. J. Numer. Anal. Model.* **8** (2011), pp. 641–666.  
<http://www.math.ualberta.ca/ijnam/Volume-8-2011/No-4-11/2011-04-06.pdf>
- [BLL12] J.-C. BOISSON, F. LEFÈVRE ET S. LOHRENGEL, Crack identification in electromagnetic testing using genetic algorithms based on extended finite edge elements, *European congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2012)*, e-Book Full Papers, pp. 917–935.
- [LN14] S. LOHRENGEL ET S. NICAISE, Analysis of eddy current formulations in two-dimensional domains with cracks, accepté pour publication dans M2AN.

## Identification et contrôlabilité

- [DGL12] M. DARBAS, O. GOUBET ET S. LOHRENGEL, Exact boundary controllability of the second-order Maxwell system : theory and numerical simulation, *Comput. Math. Appl.* **63** (2012), pp. 1212–1237.  
<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0898122111011023>
- [DL14] M. DARBAS ET S. LOHRENGEL, Numerical reconstruction of small perturbations in the electromagnetic coefficients of a dielectric material, *J. Comput. Math.* **32** (2014), pp.21–38.

## Contributions diverses

- [JLV99] P. JOLY, S. LOHRENGEL ET O. VACUS, Un résultat d'existence et d'unicité pour l'équation de Helmholtz avec conditions aux limites absorbantes d'ordre 2, *C.R. Acad. Sci. Paris, Série I* **329** (1999), pp. 193–198.  
<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0764444200885924>
- [GL02] T. GOUDON ET S. LOHRENGEL, On a discrete model for quantum transport in semiconductor devices, *Transport Theory Statist. Phys.* **31** (2002), pp. 471–490.  
<http://www.tandfonline.com/doi/full/10.1081/TT-120015510#.Uut8PLS3eFA>

# Bibliographie

- [1] R. ALBANESE ET G. RUBINACCI, Magnetostatic field computations in terms of two component vector potentials, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **29** (1990), pp. 515–532.
- [2] A. ALONSO-RODRIGUEZ, Formulation via vector potentials of eddy-current problems with voltage or current excitation, *Commun. Appl. Ind. Math.* **2** (2011), DOI : 10.1285/journal.caim.369.
- [3] A. ALONSO-RODRIGUEZ ET A. VALLI, *Eddy current approximation of Maxwell equations*, Springer, Milano, 2010.
- [4] H. AMMARI, Identification of small amplitude perturbations in the electromagnetic parameters from partial dynamic boundary measurements, *J. Math. Anal. Appl.* **282** (2003), pp. 479-494.
- [5] H. AMMARI ET G. BAO, Identification of cracks by boundary measurements at low frequencies, *Inverse Problems* **16** (2000), pp. 133–143.
- [6] H. AMMARI, A. BUFFA, ET J.-C. NÉDÉLEC, A justification of eddy currents model for the Maxwell equations, *SIAM J. Appl. Math.* **60** (2000), pp. 1805–1823.
- [7] H. AMMARI, S. MOSKOW ET M.S. VOGELIUS, Boundary itegral formulas for the reconstruction of electromagnetic imperfections of small diameter, *ESAIM Contr. Optim. Calc. Var.* **9** (2003), pp. 49–66.
- [8] H. AMMARI, M.S. VOGELIUS ET D. VOLKOV, Asymptotic formulas for perturbations in the electromagnetic fields due to the presence of imperfections of small diameter, II. The full Maxwell equations, *J. Math. Pures Appl.* **80** (2001), pp. 769–814.
- [9] C. AMROUCHE, C. BERNARDI, M. DAUGE ET V. GIRAULT, Vector potentials in three-dimensional non-smooth domains, *Math. Meth. Appl. Sci.* **21** (1998), pp; 823–864.
- [10] C. AMROUCHE ET N. EL HOUDA SELOULA,  $L^p$ -theory for vector potentials and Sobolev’s inequalities for vector fields, *C. R. Acad. Sci. Paris Série I* **349** (2011), pp. 529–534.
- [11] M. ASCH, M. DARBAS ET J.-B. DUVAL, Numerical resolution of an inverse boundary value problem for the wave equation in the presence of imperfections of small volume, *ESAIM : COCV* **17** (2011), pp. 1016-1034.
- [12] M. ASCH ET S. MEFIRE, Numerical localizations of 3D imperfections from an asymptotic formula for perturbations in the electric fields, *Journal of Computational Mathematics* **26** (2008), pp. 149-195.
- [13] F. ASSOUS ET P. CIARLET JR., Quelques résultats sur la régularité en temps des équations de Maxwell instationnaires, *C. R. Acad. Sci Paris, Série I* **327** (1998), pp. 719–724.
- [14] F. ASSOUS, P. CIARLET JR., P.-A. RAVIART ET E. SONNENDRÜCKER, A characterization of the singular part of the solution to Maxwell’s equations in a polyhedral domain, *Math. Meth. Appl. Sci.* **22** (1999), pp. 485–499.
- [15] F. ASSOUS, P. CIARLET JR. ET J. SEGRÉ, Numerical solution to the time-dependent Maxwell equations in two-dimensional singular domains : the singular complement method, *J. Comput. Phys.* **161** (2000), pp. 218–249.

- [16] F. ASSOUS, P. CIARLET, JR. ET E. SONNENDRÜCKER, Resolution of the Maxwell equations in a domain with reentrant corners, *Math. Mod. Num. Anal.* **32** (1998), pp. 359–389.
- [17] F. ASSOUS, P. DEGOND, E. HEINTZÉ, P.-A. RAVIART ET J. SEGRÉ, On a finite element method for solving the three-dimensional Maxwell equations, *J. Comput. Phys.* **109** (1993), pp. 222–237.
- [18] C. BARDOS, G. LEBEAU ET J. RAUCH, Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary, *SIAM J. Control Optim.* **30** (1992), pp. 1024–1065.
- [19] E. BÉCHET, H. MINNEBO, N. MOËS ET B. BURGARDT, Improved implementation and robustness study of the X-FEM for stress analysis around cracks, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **64** (2005), pp. 1033–1056.
- [20] M. BERNACKI, S. LANTERI ET S. PIPERNO, Time-domain parallel simulation of heterogeneous wave propagation on unstructured grids using explicit, nondiffusive, discontinuous Galerkin methods, *J. comput. Acoust.* **14** (2006), pp. 57–81.
- [21] J.-C. BOISSON, F. LEFÈVRE, ET S. LOHRENGEL, Crack identification in electromagnetic testing using genetic algorithms based on extended finite edge elements, *European congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2012)*, e-Book Full Papers, pp. 917–935.
- [22] A.-S. BONNET-BEN DHIA, C. HAZARD ET S. LOHRENGEL, A singular field method for the solution of Maxwell’s equations in polyhedral domains, *SIAM J. Appl. Math.* **56** (1999), pp. 2028–2044.
- [23] J.R. BOWLER, Eddy current interaction with an ideal crack. I. The forward problem, *J. Appl. Phys* **75** (1994), pp. 8128–8137.
- [24] J.R. BOWLER, Thin-skin eddy-current inversion for the determination of crack shapes, *Inverse Problems* **18** (2002), pp. 1890–1905.
- [25] J.R. BOWLER, Theory of eddy current crack response, Technical Report, Iowa State University, Center for Nondestructive Evaluation, Ames IA, 2002.
- [26] J.R. BOWLER, S.J. NORTON ET D.J. HARRISON, Eddy current interaction with an ideal crack. II. The inverse problem, *J. Appl. Phys* **75** (1994), pp. 8138–8144.
- [27] J.R. BOWLER, Y. YOSHIDA ET N. HARFIELD, Vector-Potential Boundary-Integral Evaluation of Eddy-Current Interaction with a Crack, *IEEE Trans. Magn.* **33** (1997), pp. 4287–4297.
- [28] S. CAHON, N. MELAB ET E.-G. TALBI, ParadisEO : A framework for the reusable design of parallel and distributed metaheuristics, *Journal of Heuristics* **3** (2004), pp. 357–380.
- [29] S. CAORSI, P. FERNANDES ET M. RAFFETTO, On the convergence of Galerkin finite element approximations of electromagnetic eigenproblems, *SIAM J. Numer. Anal.* **38** (2000), pp. 580–607.
- [30] E. CHAHINE, P. LABORDE ET Y. RENARD, Crack-tip enrichment in the XFEM method using a cut-off function, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **75** (2008), pp. 629–646.
- [31] E. CHAHINE, P. LABORDE ET Y. RENARD., A non-conformal eXtended Finite Element approach : Integral matching Xfem, *Appl. Numer. Math.* **61** (2011), pp. 322–343.
- [32] E. CHAHINE, S. NICAISE ET Y. RENARD, Optimal convergence analysis for the extended finite element method, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **86** (2011), pp. 528–548.
- [33] J. CHEMA ET T. BELYTSCHKO, An extended finite element method for two-phase fluids, *ASME J. Appl. Mech.* **70** (2003), pp. 10–17.
- [34] Y. CHOUA, *Application de la méthode des éléments finis pour la modélisation de configurations de contrôle non destructif par courants de Foucault*, Thèse, Université Paris-Sud, Paris, 2009.

- [35] Y. CHOUA, L. SANTANDREA, Y. LE BIHAN ET C. MARCHAND, Thin Crack Modeling in ECT With Combined Potential Formulations, *IEEE Trans. Magn.* **43** (2007), pp. 1789–1792.
- [36] P. G. CIARLET, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North Holland, New York, 1978.
- [37] P. CIARLET JR. ET S. LABRUNIE, Numerical solution of Maxwell’s equations in axisymmetric domains with the Fourier singular complement method, *Differ. Equ. Appl.* **3** (2011), pp. 113–155.
- [38] P. CIARLET JR., C. HAZARD ET S. LOHRENGEL, Les équations de Maxwell dans un polyèdre : un résultat de densité, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I* **326** (1998), pp. 1305–1310.
- [39] P. CIARLET JR., F. LEFÈVRE, S. LOHRENGEL ET S. NICAISE, *Weighted regularization for composite materials in electromagnetism*, *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* **44** (2010), no. 1, pp. 75–108.
- [40] G. COHEN ET P. MONK, Gauss point mass lumping schemes for Maxwell’s equations, *Numer. Methods partial Differential Equations* **14** (1998), pp. 63–88.
- [41] M. COSTABEL, A coercive bilinear form for Maxwell’s equations, *J. Math. Anal. Appl.* **157** (1991), pp. 527–541.
- [42] M. COSTABEL ET M. DAUGE, Un résultat de densité pour les équations de Maxwell régularisées dans un domaine lipschitzien, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I* **327** (1998), pp. 849–854.
- [43] M. COSTABEL ET M. DAUGE, Singularities of electromagnetic fields in polyhedral domains, *Arch. Rational Mech. Anal.* **151** (2000), pp. 221–276.
- [44] M. COSTABEL ET M. DAUGE, Weighted Regularization of Maxwell’s Equations in polyhedral domains, *Numer. Math.* **93** (2002), pp. 239–277.
- [45] M. COSTABEL, M. DAUGE ET S. NICAISE, Singularities of Maxwell interface problems, *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* **33** (1999), pp. 627–649.
- [46] M. COSTABEL, M. DAUGE, ET S. NICAISE, Singularities of eddy current problems, *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* **37** (2003), pp. 807–831.
- [47] M. COSTABEL, M. DAUGE ET C. SCHWAB, Exponential convergence of *hp*-FEM for Maxwell equations with weighted regularization in polygonal domains, *Math. Models Methods Appl. Sci.* **15** (2005), pp. 575–622.
- [48] E. CREUSÉ, S. NICAISE, Z. TANG, Y. LE MENACH, N. NEMITZ ET F. PIRIOU Residual-based *a posteriori* estimators for the  $\mathbf{A} - \varphi$  magnetodynamic harmonic formulation of the Maxwell system, *Math. Models Methods Appl. Sci.* **22** (2012), DOI : 10.1142/S021820251150028X.
- [49] M. DAUGE, *Elliptic boundary value problems on corner domains*, L.N in Math. 1341, Springer, Berlin, 1988.
- [50] V. DOLEAN, H. FAHS, L. FEZOU ET S. LANTERI, Locally implicit discontinuous Galerkin method for time domain electromagnetics, *J. Comput. Phys.* **229** (2010), pp. 512–526.
- [51] A. ELMKIES ET P. JOLY, Éléments finis d’arête et condensation de masse pour les équations de Maxwell : le cas de dimension 3, *C.R. Acad. Sci. Paris Série I* **325** (1997), pp. 1217–1222.
- [52] R. EYMARD, T. GALLOUËT ET R. HERBIN, *The finite volume method*, Handbook for Numerical Analysis, Ph. Ciarlet J.L. Lions eds, North Holland, 2000, pp. 715–1022.
- [53] H. FAHS, High-Order Leap-Frog Based Discontinuous Galerkin Method for the Time-Domain Maxwell Equations on Non-Conforming Simplicial Meshes, *Numer. Math. Theor. Meth. Appl.* **2** (2009), pp. 275–300.
- [54] L. FEZOU, S. LANTERI, S. LOHRENGEL ET S. PIPERNO, Convergence and stability of a discontinuous Galerkin time-domain method for the 3D heterogeneous Maxwell equations on unstructured meshes, *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* **39** (2005), pp. 1149–1176.

- [55] R. W. FREUND, Conjugate gradient-type methods for linear systems with complex symmetric coefficient matrices, *SIAM J. Sci. Statist. Comput.* **13** (1992), pp. 425–448.
- [56] V. GIRAULT ET P.-A. RAVIART, *Finite Element Methods for the Navier-Stokes Equations, Theory and Algorithms*, Springer, Berlin, 1986.
- [57] R. GLOWINSKI, C.H. LI ET J.-L. LIONS, A Numerical approach to the exact controllability of the wave equation (I). Dirichlet controls : Description of the numerical methods, *Japan J. Appl. Math.* **7** (1990), pp. 1–76.
- [58] T. GOUDON, Analysis of a semidiscrete version of the Wigner equation, *SIAM J. Numer. Anal.* **40** (2002), pp. 2007–2025.
- [59] P. GRISVARD, *Elliptic problems in non smooth domains*, Pitman, London 1985.
- [60] P. GRISVARD, *Singularities in boundary value problems*, Masson, Paris, 1992,
- [61] U. HASLER, A. SCHNEEBELI, D. SCHÖTZAU, Mixed finite element approximation of incompressible MHD problems based on weighted regularization, *Appl. Numer. Math.* **51** (2004), pp. 19–45.
- [62] C. HAZARD ET M. LENOIR, On the solution of time-harmonic scattering problems for Maxwell’s equations, *SIAM J. Math. Anal.* **27**, 6 (1996), pp. 1597–1630.
- [63] C. HAZARD ET S. LOHRENGEL, A singular field method for Maxwell’s equations : numerical aspects for 2D magnetostatics, *SIAM J. Numer. Anal.* **40** (2002), pp. 1021–1040.
- [64] R. HIPTMAIR, Finite elements in computational electromagnetism, *Acta Numerica* **11** (2002), pp. 237–339.
- [65] P. HOUSTON, I. PERUGIA, A. SCHNEEBELI ET D. SCHÖTZAU, Interior penalty method for the indefinite time-harmonic Maxwell equations, *Numer. Math.* **100** (2005), p. 485–518.
- [66] P. HOUSTON, I. PERUGIA ET D. SCHÖTZAU, Mixed discontinuous Galerkin approximation of the Maxwell operator, *SIAM J. Numer. Anal.* **42** (2004), pp. 434–459.
- [67] M. KŘÍŽEK ET P. NEITTAANMÄKI, Finite element approximation for a div-rot system with mixed boundary conditions in non-smooth domains, *Apl. Mat.*, **29** (1984), pp. 272–285.
- [68] J.E. LAGNESE, Exact boundary controllability of Maxwell’s equations in a general region, *SIAM J. Control Optim.* **27** (1989), pp. 374–388.
- [69] P. LESAIN ET P.-A. RAVIART, On a finite element method for solving the neutron transport equation, *Mathematical aspects of finite elements in partial differential equations*, Proc. Sypos., Math. Res. Center, Univ. Wisconsin-Madison, Academic Press, New York, 1974.
- [70] A. LEGAY, An extended finite element method approach for structural-acoustic problems involving immersed structures at arbitrary positions, *Int. J. Numer. Meth. Enngng.* **93** (2013), pp. 376–399.
- [71] R. LEIS, Zur Theorie elektromagnetischer Schwingungen in anisotropen inhomogenen Medien, *Math. Z.* **106** (1968), pp. 213–224.
- [72] M. A. LEONTOVICH, Approximate Boundary Conditions for the Electromagnetic Field at the Surface of a Well Conducting Body, *Investigations of Radiowave Propagation (AN SSSR, Moscou)*, (1949), pp. 5–12.
- [73] F. LEFÈVRE, S. LOHRENGEL ET S. NICAISE, An extended finite element method for 2D edge elements, *Int. J. Numer. Anal. Model.* **8** (2011), pp. 641–666.
- [74] J.-L. LIONS, *Contrôlabilité exacte, Perturbations et Stabilisation de Systèmes Distribués, Tome 1, Contrôlabilité exacte*, Masson, Paris, 1988.
- [75] J.-L. LIONS ET E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Dunod, Paris, 1968.

- [76] S. LOHRENGEL, *Etude mathématique et résolution numérique des équations de Maxwell dans un domaine non régulier*, Thèse, Université Paris 6, Paris, 1998.
- [77] S. LOHRENGEL ET S. NICAISE, Singularities and density problems for composite materials in electromagnetism, *Commun. PDE* **27** (2002), pp. 1575–1623.
- [78] L. CHESNEL, S. LOHRENGEL ET S. NICAISE, Corrigendum.
- [79] S. LOHRENGEL ET S. NICAISE, A discontinuous Galerkin method on refined meshes for the 2D time-harmonic Maxwell equations in composite materials, *J. Comput. Appl. Math.* **206** (2007), pp. 27–54.
- [80] S. LOHRENGEL ET M. REMAKI, A FV Scheme for Maxwell’s equations – Convergence analysis on unstructured meshes, *Finite Volumes for Complex Applications III*, ed. R. Herbin & D. Kröner, Hermes, London, 2002, pp. 219–226. Prépublication Laboratoire J.A. Dieudonné, Nice.
- [81] J.B. MANGES ET Z.J. CENDES, A Generalized Tree-Cotree gauge for Magnetic Field Computation, *IEEE Trans. Magn.* **31** (1995), pp. 1342–1347.
- [82] N. MOËS, J. DOLBOW ET T. BELYTSCHKO, A finite element method for crack growth without remeshing, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **46** (1999), pp. 131–150.
- [83] P. MONK, *Finite Element Methods for Maxwell’s Equations*, Oxford University Press, New York, 2003.
- [84] J.-C. NÉDÉLEC, Mixed finite elements in  $\mathbb{R}^3$ , *Numer. Math.* **35** (1980), pp. 315–341.
- [85] S. NICAISE, Edge elements on anisotropic meshes and approximation of the Maxwell equations, *SIAM J. Numer. Anal.*, **39** (2001), pp. 784–816.
- [86] S. NICAISE, *Polygonal interface problems*, Peter Lang, Berlin, 1993.
- [87] S. NICAISE, Exact boundary controllability of Maxwell’s equations in heterogeneous media and an application to an inverse source problem, *SIAM J. Control Optim.* **38** (2000), pp. 1145–1170.
- [88] S. NICAISE ET A.-M. SÄNDIG, General interface problems I,II. *Math. Meth. Appl. Sci.* **17** (1994), pp. 395–450.
- [89] O. PAZY, *Semigroups of linear operators and applications to Partial Differential Equations*, Appl. Math. Sci. **44**, Springer, New York, 1983.
- [90] I. PERUGIA, D. SCHÖTZAU ET P. MONK, Stabilized interior penalty methods for the time-harmonic Maxwell equations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* **191** (2002), pp. 4675–4697.
- [91] K.D. Phung, Contrôle et stabilisation d’ondes électromagnétiques, *ESAIM COCV* **5** (2000), pp. 87–137.
- [92] S. PIPERNO,  $L^2$ -stability of the upwind first order finite volume scheme for the Maxwell equation in two and three dimensions on arbitrary unstructured meshes, *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.* **34** (2000), pp. 139–158.
- [93] S. PIPERNO, M. REMAKI ET L. FÉZOU, A nondiffusive finite volume scheme for the three-dimensional Maxwell’s equations on unstructured meshes, *SIAM J. Numer. Anal.* **39** (2002), pp. 2089–2108.
- [94] F. POUPAUD ET M. REMAKI, Existence and uniqueness of the Maxwell’s system solutions in heterogeneous and irregular media, *C.R. Acad. Sci. Paris Série I* **330** (2000), pp. 99–103.
- [95] D. RABINOVICH, D. GIVOLI ET S. VIGDERGAUZ, XFEM-based crack detection scheme using a genetic algorithm, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **71** (2007), pp. 1051–1080.
- [96] D. RABINOVICH, D. GIVOLI ET S. VIGDERGAUZ, Crack identification by ‘arrival time’ using XFEM and a genetic algorithm, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **77** (2009), pp. 337–359.

- [97] G. RAUGEL, Résolution numérique par une méthode d'éléments finis du problème de Dirichlet pour le Laplacien dans un polygone, *C.R. Acad. Sci. Paris Série I* **286** (1978), pp. 791–794.
- [98] W. H. REED ET T. R. HILL, Triangular Mesh Methods for the Neutron Transport Equation, Rapport technique LA-UR-73-479, Los Alamos National Laboratory, 1973.
- [99] M. REMAKI, A new finite volume scheme for solving Maxwell's system, *COMPEL* **19** (2000), pp.913–931.
- [100] Z. REN, Influence of the R.H.S. on the Convergence Behaviour of the Curl-Curl Equation, *IEEE Trans. Magn.* **32** (1996), pp. 655–658.
- [101] G. STRANG ET G.J. FIX, *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1973.
- [102] E.-G. TALBI, *Metaheuristics : from design to implementation*, Wiley, 2009.
- [103] D. VOLKOV, Numerical methods for locating small dielectric inhomogeneities, *Wave Motion* **38** (2003), pp. 189-206.
- [104] C. WEBER, A local compactness theorem for Maxwell's equations, *Math. Meth. Appl. Sci.*, **2** (1980), pp. 12–25.
- [105] P. WERNER, On the exterior boundary value problem of perfect reflexion for stationary electromagnetic wave fields, *J. Math. Anal. Appl.* **7** (1963), pp. 348–396.
- [106] H. WHITNEY, *Geometric Integration Theory*, Princeton University Press, Princeton, 1957.
- [107] K.S. YEE, Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media, *IEEE Trans. Antennas and Propagation* **AP-16** (1966), pp. 302–307.